

En introduktion  
til  
tyndvæggede bjælker

Lars Damkilde

Institut for Kemi og Anvendt Ingeniørvidenskab  
Aalborg Universitet Esbjerg  
DK-6700 Esbjerg

September 2002

## Resumé

Rapporten omhandler en indføring i de særlige problemstillinger, som adskiller teorien for tyndvæggede bjælker fra den sædvanlige tekniske bjælketeori. Der vises eksempler på konstruktioner med tyndvæggede bjælker, og de karakteristiske stabilitetsforhold for tyndvæggede bjælker, som kan have væsentlig indflydelse ved dimensionering, beskrives kort. Vridningsoptagelsen og tværsnitshvælvingen introduceres igennem beregning af et I-tværsnit udsat for vridning, og optagelsen af vridning deles op i den såkaldte frie vridning eller St. Venant vridning og hvælvingsvridningen. Afklingningslængden af hvælvingsbidraget bestemmes, og hermed kan man overslagsmæssigt få et mål for tværsnitshvælvingens betydning. På basis af et eksempel vises forskellene i både spændinger og flytninger i tilfældene fri vridning og bunden vridning (tværsnitshvælvingen forhindret).

# Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug ved undervisningen i statik. Formålet med notatet er at give en indføring i beregning af tyndvægede bjælker, således at de særlige forhold omkring vridningsoptagelse og tværsnitshvælving belyses. Udgangspunktet for beskrivelsen er et I-tværsnit, som kan behandles særligt enkelt, men til gengæld udvikles der ikke et generelt beregningskoncept. I referencelisten findes indgange til mere grundlæggende teoretiske og numeriske metoder.

Esbjerg, September 2002

Lars Damkilde

# Indhold

Symbolliste	iii
Baggrund	1
Eksempel	3
Referencer	9

# Symbolliste

Nedenfor er angivet de væsentligste symboler.

- b Brede af I-profil
- h Højde af I-profil
- k Tværskningskarakteristika. Afklingslængde  $^{-1}$
- $l$  Længde af bjælke
- t Pladetykkelse i I-profil
- x Koordinat langs bjælkeakse
- y, z Koordinater i tværsknittets plan
- A Tværskningsareal
- $B$  Bimomentet,  $N m^2$
- $C_i$  Arbitrære konstanter.  $i = 1, 4$
- E Youngs modulus
- G Forskydningsmodulet
- $I_F$  Bøjningsinertimoment af flange om stærk akse
- $I_V$  Vridningsinertimoment
- $I_{\omega\omega}$  Hvælvsingsinertimoment,  $m^6$
- $M_F$  Bøjningsmoment i flange
- $M_S$  Vridningsmoment hidrørende fra fri vridning. St. Venant Vridning
- $M_V$  Vridningsmoment
- $M_{\omega}$  Vridningsmoment hidrørende fra hvælving
- $Q_F$  Forskydningskraft i flange
- $\nu$  Poisson's forhold
- $\omega$  Hvælvsingsfunktionen
- $\varphi$  Tværsknittets vridningsvinkel

# 1. Baggrund

I den sædvanlige tekniske bjælketeori (Euler-Bernoulli teori) regnes både med, at plane tværsnit forbliver plane, og at bjælkeaksen forbliver normal til tværsnitsplanen. Tøjningstilstanden vil variere lineært over tværsnittet, og de deraf afledede snitkræfter kan hermed opdeles i 3 uafhængige komponenter: Normalkraft og bøjningsmoment om de 2 hovedakser. Forskydningskræfterne afledes af momentvariationen, og fordelingen af forskydningssspændingerne findes ud fra Grashofs formel, der er baseret på en ligevægtsbetragtning. Den matematiske elasticitetsteori giver sammenhængen mellem forskydningssspændinger og forskydningstøjninger for et 3-dimensionalt kontinuum. Den tekniske bjælketeoris forenklinger medfører imidlertid en inkonsistens ved bestemmelse af forskydningssspændingerne. Forudsætningerne om tværsnitsdeformationerne betyder, at der ikke er nogen forskydningstøjninger, og ifølge den matematiske elasticitetsteori dermed heller ingen forskydningssspændinger. I den tekniske bjælketeori omgås problemet ved at bestemme forskydningssspændingerne ud fra ligevægtsbetragtninger, der er uafhængige af deformationerne. Forskydningskræfter vil teoretisk medføre, at plane tværsnit ikke forbliver plane, men for relativt tykvæggede tværsnit er fejlen imidlertid meget lille, og den tekniske bjælketeori er i disse tilfælde for alle praktiske formål tilstrækkelig nøjagtig.

I den tekniske bjælketeori løses vridningsproblemet ud fra en forudsætning om, at vridningen er fri dvs., at tværsnitsdeformationer i bjælkeaksens retning kan foregå uhindret. Den frie vridningstilstand resulterer altså i en såkaldt tværsnitshvælvning, der er i modstrid med "at plane tværsnit forbliver plane". Ved samlinger mellem bjælkeelementer under en vinkel vil dette lede til kompatibilitets problemer, idet vridningsdeformationerne ikke passer sammen med bøjnings- og aksialdeformationerne. For tilstrækkelig tykvæggede bjælkeelementer vil vridningsdeformationerne normalt være af en noget mindre størrelse end de øvrige deformationer, og dette betyder, at inkompatibiliteten for de fleste praktiske formål ikke har nogen væsentlig betydning.

I den tyndvæggede bjælketeori opgives forudsætningen om "at plane tværsnit forbliver plane", og dette giver en mere konsistent sammenhæng mellem vridning og bøjning/normalkraft. Vridningsproblemet forudsættes ikke længere at skulle foregå uhindret, og man kan få såkaldt inhomogen vridning, dvs. en vridningstilstand hvor den første afledede af vridningsvinklen,  $\varphi$ , ikke er konstant.

Ved beregning af tyndvæggede bjælker indføres i forhold til de sædvanlige 6 frihedsgrader en såkaldt hvælvingsparameter, der udtrykker ændringen i den afledede af drejningsvinklen (dvs.  $\varphi''$ ). Til denne frihedsgrad er knyttet det såkaldte bimoment, der er en ekstra snitkraft. Indføring af hvælvingsparameteren er nødvendig for at kunne behandle kipning, der er et stabilitetsproblem. I modsætning til den sædvanlige bjælketeori er placering af belastningen i tværsnittet af betydning for tyndvæggede bjælker. Vridningsstivheden af et profil er stærkt afhængig af om profilet er åbent eller lukket, men set fra bjælketeoriens synspunkt er løsningsmetodikken den samme.

Tyndvæggede bjælker kaldes nogle gange for Vlasov-bjælker, og Vlasov gav som den første en systematisk beskrivelse af teorien for tyndvæggede bjælker, [1]. Tidligere arbejder var præget af løsninger på specialproblemer, se f.eks. Timoshenko, [3], hvor eksemplet i det efterfølgende kapitel er hentet fra. Kollbrunner og Hajdn, [2] er en klassiker indenfor om-

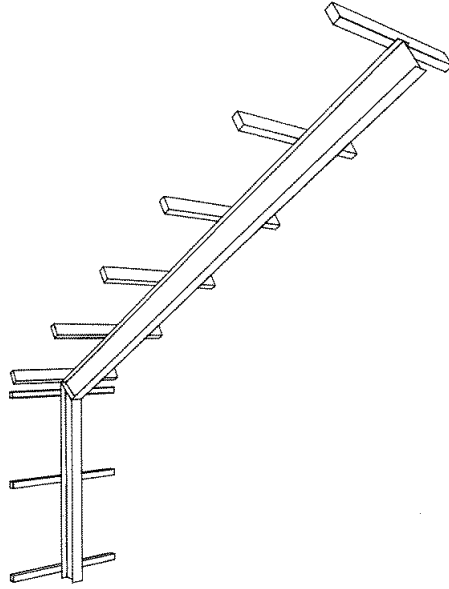


Fig. 1: Eksempel på rammekonstruktion af tyndvæggede bjælkeelementer

rådet, og de giver en systematisk gennemgang af teorien samt en række analytiske løsninger for udvalgte problemer. Murray, [4], giver en mere praktisk præget fremstilling af den tyndvæggede bjælket teori samt eksempler på anvendelser. Krenk, [5], giver en moderne fremstilling af den tyndvæggede bjælket teorien baseret på et kontinuummekanisk grundlag, og der angives numeriske beregningsalgoritmer. Udover de ovennævnte findes der en righoldig litteratur, der behandler den generelle teori eller specielle problemstillinger.

Gyldigheden af den sædvanlige tekniske bjælket teori kan ikke klarlægges på simpel måde, og den afhænger af tværsnittets udformning, f.eks. pladetykkelsen i forhold til højden, bjælkeelementernes længde samt den strukturelle virkemåde. Med en stadigt stigende udnyttelse af konstruktionsmaterialet er der flere og flere bjælke/rammekonstruktioner, hvor man er tvunget til at medtage tværsnitshvælvingen. I figur 1 er der vist et eksempel på en rammekonstruktion opbygget af I-profiler. Sådanne konstruktioner vil ofte dimensioneres ud fra stabilitetssvigt i form af kipning, og dette nødvendiggør en tyndvægget bjælket teori. Brodragere i stål opbygges ofte som lukkede tværsnit, og trafiklast vil kunne inducere vridning i brodrageren. Spændingsfordelingen i konstruktionen kræver hensyntagen til ikke-homogen vridning og dermed en tyndvægget bjælket teori.

I tyndvæggede bjælkekonstruktioner er overgangsbetingelserne mellem elementer, der mødes under ikke rette vinkler komplekse. Stivhedsforholdene af samlingerne har stor betydning for den totale konstruktions stivhed, og dermed for stabilitetslasten. I [7] og [6] er dette problem behandlet, og [6] indeholder en elementmetodeformulering af både det lineære problem og stabilitetsproblemet.

## 2. Eksempel

Vi betragter en I-bjælke indspændt i den ene ende og fri i den anden ende. Belastningen består af et vridende moment i den frie ende,  $M_V$ . Geometriske mål fremgår af figur 2.

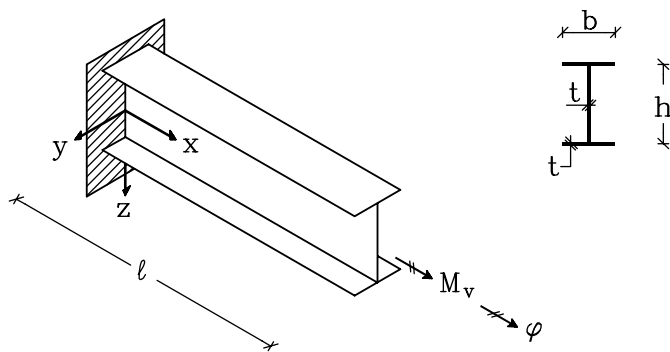


Fig. 2: Udkraget I-bjælke udsat for vridning

Indledningsvis beregnes vridningsvinklen,  $\varphi$ , svarende til, at bjælken er i fri vridning.

$$I_V = \frac{1}{3} t^3 (b + h + b) = \frac{1}{3} t^3 (2b + h) \quad (1)$$

$$\varphi = l \frac{M_V}{GI_V} \quad (2)$$

Når bjælken er i fri vridning, får den aksiale flytninger som vist i figur 3, og denne deformationstilstand betegnes tværsnitshvælvning. Formen af hvælvningen, den såkaldte hvælvningsfunktion,  $\omega$ , bestemmes ved løsning af det frie vridningsproblem, og den afhænger bl.a. af tværsnittets geometri.

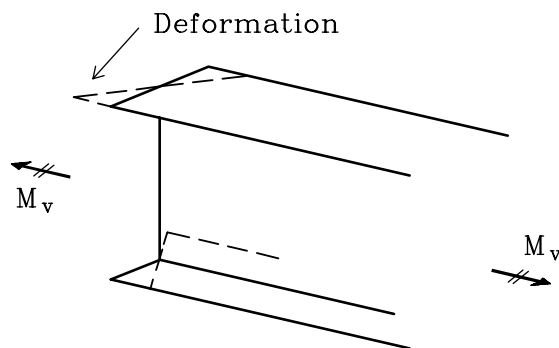


Fig. 3: Flytninger forårsaget af vridning

Det interessante spørgsmål er, hvorledes indspændingen, der forhindrer tværsnitshvælvning, påvirker flytningerne, dvs.  $\varphi$ , og spændingsfordelingen i bjælken.

Tværsnittet vil pga. profilets symmetriegenskaber dreje omkring det elastiske tyngdepunkt, som vist i figur 4. I det mere generelle tilfælde vil drejningen foregå om det såkaldte



forskydningscenter, der ikke nødvendigvis er sammenfaldende med det elastiske center. Forskydningscenteret er karakteriseret ved, at tværkræfter der angriber i dette punkt ikke giver vridning, og hvis man f.eks påvirker et U-profil med en tværkraft gennem det elastiske center observeres en vridning af tværsnittet.

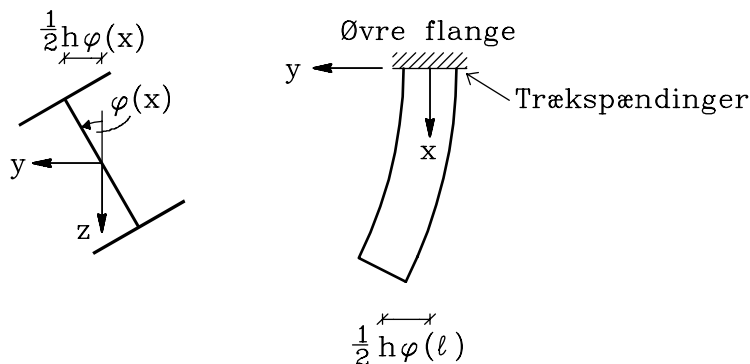


Fig. 4: Vridning af tværsnit og den øvre flanges flytninger

Vridningen af profilet medfører bøjning i henholdsvis over- og underflange, som vist på figur 4. Bøjningen er i flangernes egen plan, og de 2 flanger vil bøje modsat. Ud fra den sædvanlige bjælket teori kan bøjningsmomentet i den øvre flange skrives som

$$M_F = \frac{1}{2} h \varphi''(x) EI_F \quad (3)$$

hvor fortegnet af  $M_F$  er vist i figur 5.

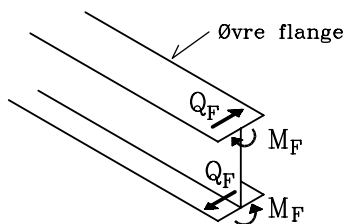


Fig. 5: Moment og forskydningskræfter i flanger

$I_F$  angiver flangernes bøjningsstivhed i egen plan, og er givet ved:

$$I_F = \frac{1}{12} t b^3 \quad (4)$$

De 2 modsat rettede momenter  $M_F$  vil i den almindelig tekniske bjælket teori ikke give nogen virkning, da summen af momenterne er 0, men den tyndvæggede bjælket teori tager deformations- og spændingsbidragene fra momentparret i regning. Udover de 6 sædvanlige snitkræfter findes i den tyndvæggede bjælket teori en ekstra snitkraftkomponent, der betegnes bimomentet,  $B$ . For I-profilen kan bimomentet gives en særlig simpel beskrivelse, og de 2 modsat rettede momenter giver en normalspændingsfordeling svarende til bimomentets.

Enheden for bimomentet er Newton  $m^2$ , og oversat til I-profilet svarer det til momentet gange tværsnitshøjde. I det generelle tilfælde kan bimomentet ikke tolkes så enkelt.

Momentvariationen vil resultere i forskydningskræfter,  $Q_F$ , givet ved:

$$Q_F = M'_F = \frac{1}{2} h \varphi'''(x) EI_F \quad (5)$$

Forskydningskræfterne  $Q_F$  resulterer i et vridningsmoment af størrelsen:

$$M_\omega = -h Q_F = -\frac{1}{2} h^2 \varphi'''(x) EI_F \quad (6)$$

Fortegnsregningen er som for det ydre vridningsmoment. Index  $\omega$  angiver, at det er den del af vridningen, der har med hvælvingsfunktionen at gøre. Mere generelt defineres  $M_\omega$ , som den afledede af bimomentet,  $B$ , med hensyn til  $x$ , og enheden for bimomentet er  $N m^2$ .

For fri vridning vil der gælde, at  $\varphi(x)$  er lineært varierende langs bjælkeaksen. Dette medfører, at de sekundære snitkræfter,  $M_F$  og  $Q_F$ , ikke optræder.

Den del af vridningsmomentet,  $M_S$ , der optages som fri vridning er givet ved:

$$M_S = GI_V \varphi'(x) \quad (7)$$

Denne del af vridningsmomentet betegnes ofte St. Venant vridningen.

Det samlede vridningsmoment optages som en blanding af St. Venant vridning og hvælvingsvridning, og vi får følgende sammenhæng.

$$M_V = M_S + M_\omega = GI_V \varphi'(x) - \frac{1}{2} h^2 \varphi'''(x) EI_F \quad (8)$$

Ved løsningen af differentialligningen er det bekvemt at indføre

$$k^2 = \frac{GI_V}{\frac{1}{2}h^2 EI_F} = 8 t^2 \frac{h + 2b}{h^2 b^3} \frac{G}{E} \quad (9)$$

Størrelsen  $k^2$  afhænger af tværsnittets dimensioner og materialet. Leddet  $\frac{1}{2}h^2 EI_F$  betegnes mere generelt hvælvingsinertimomentet,  $I_{\omega\omega}$ , og det er en tværsnitskonstant som bestemmes på basis af hvælvingsfunktionen,  $\omega$ .

Ved at indføre (9) i (8) fås den styrende differentialligning for vridning som:

$$\varphi'''(x) - k^2 \varphi'(x) = -\frac{M_V}{\frac{1}{2} h^2 EI_F} \quad (10)$$

For en bjælke, der kun er påvirket af vridningsmomenter i enderne, må  $M_V$  udfra statiske årsager være konstant langs bjælken. Hermed kan den fuldstændige løsning til differentialligningen omfattende både den homogene og partikulære løsning skrives som:

$$\varphi(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 + C_4 x \quad (11)$$

hvor  $C_1 - C_4$  er arbitrære konstanter, der bestemmes ud fra bjælkens randbetingelser. Ved at udnytte at  $M_V$  er konstant langs bjælken findes  $C_4$  ved indsættelse af (11) i (10) .

$$C_4 = \frac{1}{k^2} \frac{1}{2} \frac{M_V}{h^2 EI_F} = \frac{M_V}{GI_V} \quad (12)$$

De tre resterende parametre bestemmes ud fra randbetingelserne i den indspændte ende ( $x = 0$ ) og den frie ende ( $x = l$ ).

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 & \text{(a)} \\ \varphi'(0) &= 0 & \text{(b)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\varphi''(l) = 0 \quad (14)$$

Formel 13b udtrykker, at der ikke er nogen hvælving i indspændingen, og formel 14 at der ikke er nogen normalspændinger i den frie ende, jævnfør (3). Ud fra de 3 randbetingelser bestemmes  $\varphi(x)$ .

$$\varphi(x) = \frac{M_V}{k GI_V} [kx - \sinh kx + \tanh kl(\cosh kx - 1)] \quad (15)$$

Vridningsvinklen i den frie ende er givet ved:

$$\varphi(l) = \frac{M_V l}{GI_V} \left(1 - \frac{1}{kl} \tanh kl\right) \quad (16)$$

Som ventet bliver vridningsvinklen mindre end den tilsvarende for fri vridning, (2).

Som eksempel kan betragtes et profil med  $t = 7$  mm,  $h = 300$  mm,  $b = 100$  mm og  $l = 4000$  mm. Med Poissons forhold  $\nu = 0.3$  findes, (9):

$$\begin{aligned} k^2 &= 8 \cdot 7^2 \frac{300 + 200}{300^2 100^3} 0.4 \text{ mm}^{-2} \\ kl &= 0.93 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} 4000 \text{ mm} \cong 3.7 \\ 1 - \tanh kl &= 0.73 \end{aligned} \quad (17)$$

For dette tilfælde reduceres bjælkens vridningsvinkel altså med ca. 27 %.

For voksende  $l$  går leddet  $\tanh kl/kl$  mod 0, hvilket betyder, at vridningsvinklen i (16) nærmer sig resultatet fra den frie vridning. Sagt med andre ord vil en tilstrækkelig lang bjælke ikke mærke hvælvingsindspændingen væsentligt.

Vridningsmomentet,  $M_V$ , optages som nævnt som en blanding af St. Venant vridning og hvælvingsvridning. Ved brug af (7) og (15) findes:

$$M_S = M_V(1 - \cosh kx + \tanh kl \sinh kx) \quad (18)$$

Relationen kan optegnes for forskellige  $kl$ -værdier. Med udgangspunkt i det sidste eksempel vælges bjækelængder på henholdsvis 2.15 m, 4.30 m og 6.45 m svarende til  $kl = 2, 4$  og 6. Den korte bjælke må forventes at mærke indspændingen helt ud i den fri ende, medens den lange bjælke på en stor del af konstruktionen må være i ren vridning. Relationen er optegnet i figur 6.

Af figur 6 fremgår, at for  $kl = 6.0$  vil vridningen i de yderste 60% af bjælken optages for mere end 90% som ren vridning. Tilsvarende ses, at for  $kl = 2.0$  vil ca. 30% af vridningen optages som hvælvingsvridning i den yderste del af bjælken.

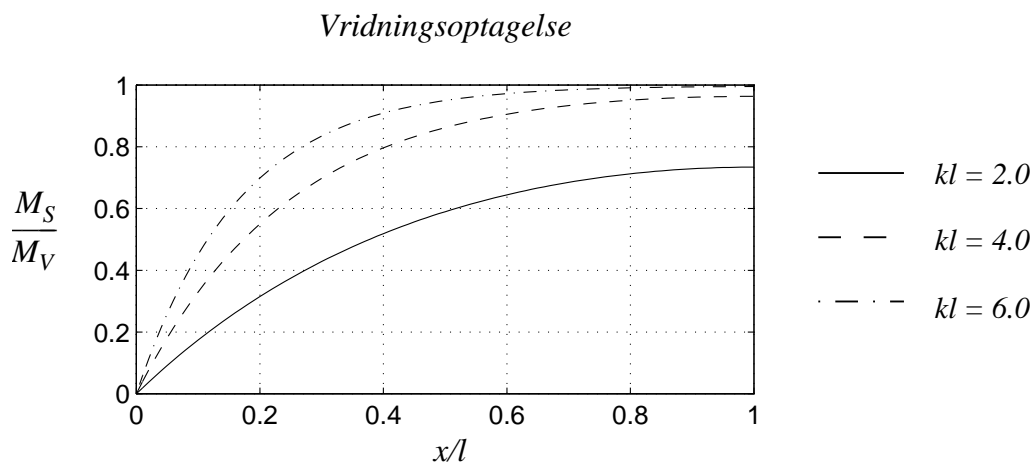


Fig. 6: Forløb af  $M_S$

$kl$ -værdien karakteriserer forløbet af indflydelsen fra indspændingen. For en stor værdi af  $kl$  klinger virkningen hurtigt ud, medens den for en lav værdi kan mærkes langs hele bjælken. Parameteren  $k$  er en tværsnitskonstant, som vist i (9).

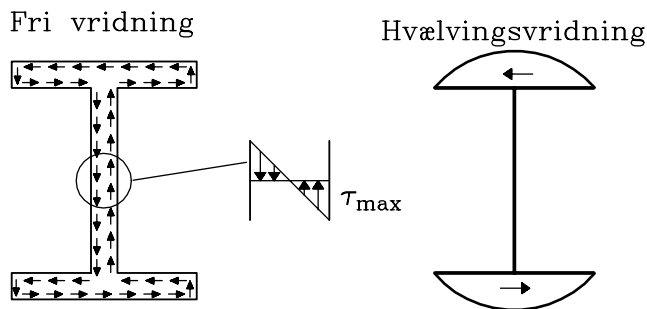


Fig. 7: Forskydningsspændingsfordeling for vridningsoptagelse

For fri vridning optages vridningsmomentet som forskydningsspændinger vist i figur 7. Det karakteristiske er, at alle dele påvirkes ens (pga. samme profil tykkelse), og at forskydningsspændingerne er 0 i midterplanet. Fra teorien om fri vridning findes den maksimale forskydningsspænding som:

$$\tau_{Max}^S = \frac{M_V}{I_V} t = \frac{M_V}{\frac{1}{3} t^2 (2b + h)} \quad (19)$$

hvor  $M_V$  er den del af det totale vridningsmoment i tværsnittet, der optages som fri vridning.

For hvælvsingsvridning optages vridningsmomentet som forskydningsspændinger i over- og underflange, som vist i figur 7. Det karakteristiske ved hvælvsingsinertimomentet er, at forskydningsspændinger er konstante igennem tykkelsen. Vha. Grashof's formel findes  $\tau_{Max}^\omega$  for hvælvsingsvridning som

$$\tau_{Max}^\omega = \frac{3}{2} \frac{Q}{t b} = \frac{3}{2} \frac{M_V/h}{t b} = \frac{3}{2} \frac{M_V}{h t b} \quad (20)$$

hvor  $M_V$  nu er den del af det totale vridningsmoment i tværsnittet, der optages via tværsnitshvælving.

Ved indsættelse af tal fra det tidligere eksempel findes forholdet mellem forskydningsspændingerne for samme værdi af  $M_V$  til:

$$\frac{\tau_{Max}^\omega}{\tau_{Max}^S} = 0.058 \quad (21)$$

Forskydningsspændingsniveauet bliver betydeligt lavere, når vridningsmomentet optages som hvælvsingsvridning til gengæld er forskydningsspændingerne jævnt fordelt over tykkelsen. I tillæg til forskydningsspændinger fås en normalspændingsfordeling i flangerne hidrørende fra bøjning, og denne bliver størst ved indspændingen.

Ved udregning findes:

$$\sigma_{max} = \frac{M_F(0)}{\frac{1}{6} b^2 t} = \frac{\frac{1}{2} h \varphi''(0) EI_F}{\frac{1}{6} b^2 t} \quad (22)$$

Ved differentiation af (15) findes:

$$\varphi''(0) = \frac{M_V}{GI_V} k \tanh kl \quad (23)$$

Ved indsættelse af (23) i (22) findes:

$$\sigma_{max} = M_V \frac{3}{4} \frac{E}{G} \frac{bh}{t^3(2b+h)} k \tanh kl \quad (24)$$

For  $kl = 3.7$  og med tallene fra det tidligere eksempel findes

$$\sigma_{max} = M_V 0.303 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-3} \quad (25)$$

Omsat til et von Mises flydekriterium svarer dette til, at det samlede spændingsniveau for den hvælvsingsindspændte I-bjælke er 43% højere.

# Litteratur

- [1] Vlasov, V. Z.: *Thin-Walled Elastic Beams*, Translated from Russian by the Israel Program for Scientific Translations. US Department of Commerce, National Information Service, TT-61-11400, 1961.
- [2] Kollbrunner, C. F. and Hajdin, N.: *Dünnwandige Stäbe, Band 1 und 2*, Springer-Verlag, 1972.
- [3] Timoshenko, S.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1936.
- [4] Murray, Noel W.: *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [5] Krenk, Steen: *Three-Dimensional Elastic Beam Theory, Part 1 and 2*, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, F 114 and F 115, 1989.
- [6] Petersen, P., Krenk, S. og Damkilde, L.: *Stabilitet af rammer af tyndpladeprofiler*, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, R 265, 1991.
- [7] Krenk, S. and Damkilde, L.: Torsionssteifigkeit und Deformation von Rahmenecken aus I-trägern, *Stahlbau*, 61 (1992), 173-178.