

**Elementmetodeformulering
af
tyndvæggede bjælker**

Lars Damkilde

Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer
Danmarks Tekniske Universitet
DK-2800 Lyngby

April 1999

Resumé

Rapporten omhandler en systematisk beregningsmetode for tyndvæggede bjælker. Indledningsvis behandles tværsnitsberegning, hvor dels forskydningscenteret og hvælvingsfunktionen bestemmes samt de deraf afledede tværsnitskonstanter. Herefter opstilles stivhedsmatricen for et tyndvægget bjælkeelement, og i elementdiskretiseringen anvendes både eksakte og tilnærmede formfunktioner. Det vises, at de tilnærmede formfunktioner giver en høj grad af nøjagtighed, og i den efterfølgende stabilitetsberegning anvendes udelukkende tilnærmede formfunktioner. Stabilitetsproblemet formuleres ud fra et ikke-lineært tøjningsmål, og den geometriske stivhedsmatrix opstilles, og ændringerne i forhold til den sædvanlige bjælketæori beskrives. Stabilitetsproblemet resulterer i et lineært egenverdiproblem, der løses med standardmetoder.

Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset 59422, Edb-metoder for rammekonstruktioner. Formålet med notatet er at give en systematisk indføring i beregning af tyndvæggede bjælker omfattende både den lineære del og den klassiske stabilitetsberegning i form af f.eks. kipning. Stabilitetsproblemet formuleres udfra et ikke-lineært tøjningsmål svarende til den sædvanlige stabilitetsberegning for bjælker regnet efter den tekniske bjælketeori. Ved elementmetodeformuleringen anvendes tilnærmede formfunktioner, hvor stabilitetsproblemet bliver et lineært egenverdiproblem og samtidig kan der tages hensyn til mere avancerede ikke-lineariteter.

I notatet er der tilstræbt en så enkel notation som muligt, således at teorien let lader sig overføre til et elementmetodeprogram.

Lyngby, April 1999

Lars Damkilde

Indhold

Symbolliste	iii
1 Hvælving af tyndvæggede, enkeltssammenhængende bjælketværsnit	1
2 Stivhedsmatrix for et tyndvægget bjælkeelement	13
3 Stabilitet af tyndvæggede bjælker	22
3.1 Svigtformer, aksial last	22
3.2 Svigtformer, tværlast	23
3.3 Ikke-lineært tøjningsmål	25
3.4 Geometrisk stivhedsmatrix	26
3.4.1 Placering af belastning	27
Referencer	28

Symbolliste

Nedenfor er angivet de væsentligste symboler.

k	Tværsnitskarakteristika. Afklingningslængde $^{-1}$
l	Længde af bjælke
$r(s)$	Vinkelret afstand fra omdrejningspunkt
s	Stedkoordinat for tværsnitsbeskrivelse
t	Pladetykkelse i profil
u	Flytning langs bjælkeakse
w_y, w_z	Flytninger i tværsnittets plan
x	Koordinat langs bjælkeakse
y, z	Koordinater i tværsnittets plan
A	Tværsnitsareal eller Forskydningscenter (a_y, a_z)
B	Bimomentet, $N m^2$
C	Elastiske tyngdepunkt (c_y, c_z)
C_i	Arbitrære konstanter. $i = 1, 4$
E	Youngs modulus
G	Forskydningsmodulet
H	Forskydende kraft per længdeenhed
I_V	Vridningsinertimoment
$I_{\omega\omega}$	Hvælvingsinertimoment, m^6
M_S	Vridningsmoment hidrørende fra fri vridning. St. Venant Vridning
M_V	Vridningsmoment
M_ω	Vridningsmoment hidrørende fra hvælvning
P	Pol. Omdrejningspunkt
γ	Forskydningstøjning
ϵ_x	Normaltøjning
ν	Poisson's forhold
φ	Tværsnittets vridningsvinkel
σ_x	Normalspænding
ω	Hvælvingsfunktionen

Kapitel 1

Hvælving af tyndvæggede, enkelt sammenhængende bjælketværsnit

Der betragtes et tyndvægget tværsnit, som vist i figur 1.

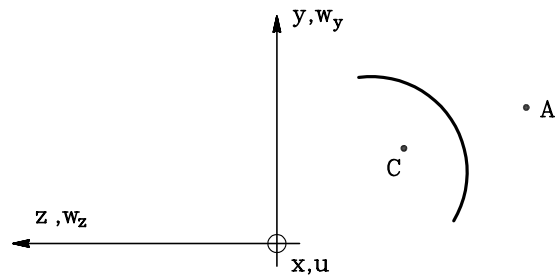


Fig. 1: Tyndvægget tværsnit

Profilen beskrives i et retvinklet kartesisk koordinatsystem y, z . Det elastiske tyngdepunkt betegnes C , og koordinaterne (c_y, c_z) . Omdrejningscentret for profilet betegnes A og koordinaterne (a_y, a_z) .

Profilen undergår en vridning, hvor φ betegner vridningsvinklen. φ afhænger af koordinaten i profils længdeakse, x .

Det forudsættes, at profilet bevarer sin form i $y-z$ planen under deformation. Dette stiller indirekte nogle krav til profils stivhed, som dog ikke behandles her.

Profilen vil pga. vridningen få flytningerne

$$\begin{aligned} w_y &= -\varphi(z - a_z) \\ w_z &= \varphi(y - a_y) \\ u &= -\omega(y, z) \varphi' \end{aligned} \tag{1}$$

hvor φ' betegner differentiering af φ mht. længdekoordinaten, x .

Funktionen $\omega(y, z)$ betegnes hvælvingfunktionen, og udtrykker profils formændringer i

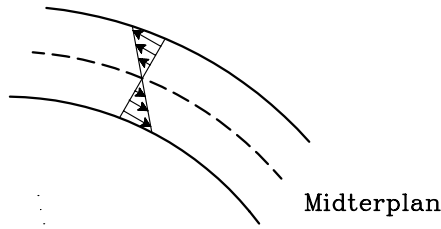


Fig. 2: Spændingsfordeling igennem tværsvitsvæg

længderetningen. Plane tværsvit forbliver altså ikke plane ved vridningspåvirkning. Idet der betragtes enkeltssammenhængende, tyndvæggede profiler, forudsættes yderligere, at forskydningspændingsfordelingen igennem profilvæggen er, som vist i figur 2. Forskydningspændingen er 0 i midterplanet, og dette er en rimelig forudsætning, hvis tværsvitvæggenes tykkelse er lille i forhold til de øvrige profildimensioner. Hvis profilet ikke er enkeltssammenhængende overlejres fordelingen af en jævnt fordelt forskydningspænding for de dele, der indgår i lukkede ringe. Ud fra forudsætningen om forskydningspændingsfordelingen kan der opstilles et udtryk til bestemmelse af variationen i ω langs profilet. Der indføres en stedkoordinat, s , der løber langs profilet, som vist i figur 3.

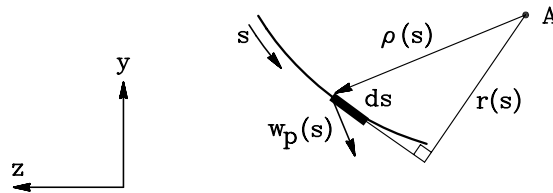


Fig. 3: Flytninger i tværsvit

Vektoren $\rho(s)$ går fra omdrejningscentret til punktet på tværsvittet med stedkoordinaten s . Flytningerne i planen er beskrevet ved vektoren $\mathbf{w}_p(s)$, der står vinkelret på $\rho(s)$ og har længden $|\rho(s)|\varphi$. Til bestemmelse af forskydningspændingerne er det imidlertid nødvendigt at bestemme den del af flytningsvektoren, der er rettet tangentielt til profilet. Idet $r(s)$ angiver afstanden fra forskydningscenteret til tangenten til profilet, fås den tangentielle flytningskomponent til.

$$w_t = r(s) \varphi \tag{2}$$

Herefter betragtes en del af profilet, som vist i figur 4.

Fladeelementets flytninger er beskrevet ved $w_t(s)$ og $\omega(s)\varphi$. Ud fra flytningerne bestemmes forskydningsstøjningen, γ , som

$$\gamma = \frac{d}{dx}w_t(s) + \frac{d}{ds}(-\omega(s)\varphi) \tag{3}$$

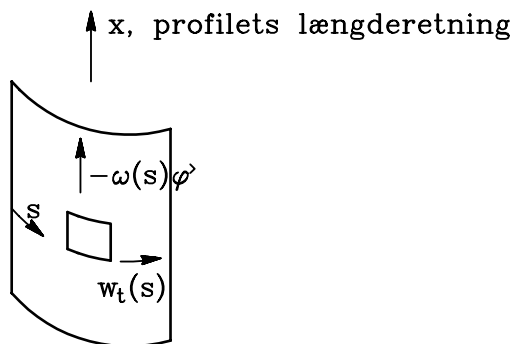


Fig. 4: Fladeelement i profil

Ved indsættelse af udtrykket for $w_t(s)$ fås:

$$\gamma = r(s) \varphi' - \frac{d}{ds}(\omega(s)) \varphi' \quad (4)$$

Ud fra forudsætningen at forskydningsspændingen er 0 i midterplanet, fås tilsvarende, at forskydningstøjningen er 0. Hermed fås en differentilligning til bestemmelse af ω 's variation med stedkoordinaten, s .

$$r(s) - \frac{d}{ds}\omega(s) = 0 \quad (5)$$

I formel (1) er $\omega(s)$ blevet normeret svarende til $\varphi' = -1$.

På basis af differentilligningen i (5) kan det konkluderes, at langs retliniede dele af profilet vil hvælvingfunktionen variere lineært.

Ved integration af (5) opstilles et udtryk til bestemmelse af hvælvingfunktionen.

$$\omega(s) = \omega(0) + \int_0^s r(s) ds \quad (6)$$

Indholdet af (6) kan gives en grafisk tolkning, som vist i figur 5.

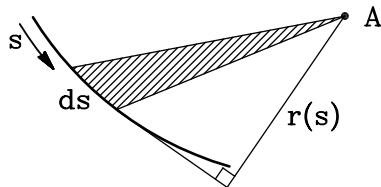


Fig. 5: Sektorareal

Bidraget til integralet $\int r(s) ds$ for stykket ds svarer til det dobbelte af den skraverede trekants areal. Beregningen af hvælvingfunktionen ud fra omdrejningspunktet A kan altså

opfattes som en summation af de såkaldte sektorarealer regnet med fortegn og multipliceret med 2.

Eksempel

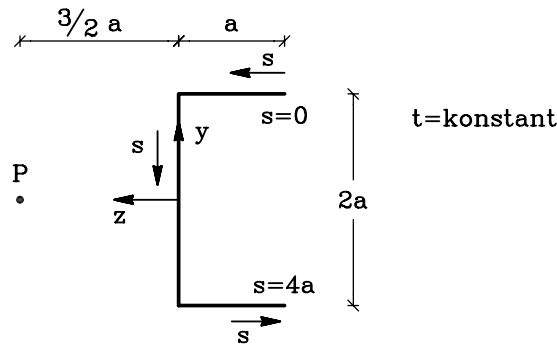


Fig. 6: C-profil

Geometrien af tværsnittet fremgår af figur 6. Profilet beskrives med stedkoordinaten s , og $\omega(0)$ sættes til 0. Der vil senere blive opstillet en metode til at bestemme den absolutte størrelse af hvælvingsfunktionen, og dermed undgå det arbitrære valg $\omega(0) = 0$.

Omdrejningspunktet for profilet er ikke kendt a priori, og der vælges et tilfældigt punkt P ofte betegnet en pol. Der vil senere blive opstillet en metode til at bestemme omdrejningspunktet på basis af hvælvingsfunktionen for en vilkårlig valgt pol.

I figur 7a er forløbet af hvælvingsfunktionen angivet, og i figur 7b er vist sektorarealerne. Vinklerne langs stykke 1 og 3 er positive, og giver derfor et positivt bidrag til hvælvingsfunktionen. For stykke 2 er bidraget derimod negativt.

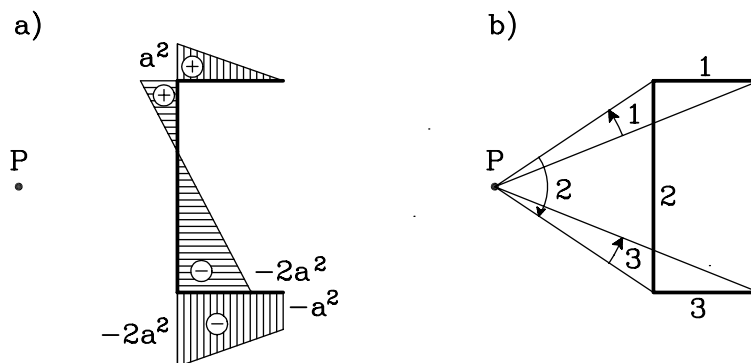


Fig. 7: Hvælvingsfunktion og sektorarealer

Eksempel slut

Tværsnitshvælvningen vil resultere i en normaltøjningsfordeling langs profilet givet ved

$$\epsilon_x = u' = -\omega(s) \varphi'' \quad (7)$$

hvor u' er den aksiale flytning differentieret mht. den aksiale koordinat x . Normaltøjningerne

giver normalspændinger, som vist i (8).

$$\sigma_x = -E \omega(s) \varphi'' \quad (8)$$

For homogen vridning er $\varphi' = \text{konstant}$, og normalspændingerne bliver herved identisk 0. For ikke-homogen vridning vil der imidlertid komme egentlige normalspændinger.

I bestemmelsen af hvælvingsfunktionen, $\omega(s)$, er der indtil nu truffet 3 arbitrære valg: niveauet af $\omega(s)$ og placeringen af omdrejningspunktet (2 parametre). Disse 3 valg ønskes fastlagt således, at normalspændingsfordelingen fra ikke-homogen vridning hverken har en resulterende normalkraft eller resulterende bøjningsmomenter om de 2 akser. Ud fra disse betingelser bestemmes niveauet for $\omega(s)$ og omdrejningspunktet fastlægges.

Det elastiske tyngdepunkt fastlægges ud fra samme filosofi, således at de enkelte snitkraftkomponenter i energimæssig sammenhæng kan siges at være ortogonale. Fordelen er, at snitkræfterne ikke har nogen samvirken, hvis de relateres til enten det elastiske center eller omdrejningscentret. Forskydningskræfter gennem omdrejningspunktet vil ikke give vridning af tværsnittet, og derfor betegnes omdrejningspunktet også for forskydningscenteret.

Den resulterende normalkraft bestemmes som

$$N_{res} = -\varphi'' \int_{kontur} E t(s) \omega(s) ds \quad (9)$$

hvor der integreres langs profilets midterlinie.

Ved at lægge et konstant bidrag til $\omega(s)$ sikres, at den resulterende normalkraft er 0.

$$\omega(0) = - \int_{kontur} E t(s) \omega(s) ds / \int_{kontur} E t(s) ds \quad (10)$$

Eksempel

Der vil nu blive bestemt en hvælvingsfunktion uden resulterende normalkraft for eksemplet vist i figur 6.

$$\begin{aligned} \int_{kontur} E t(s) \omega(s) ds &= Et \left[a \frac{1}{2} (0 + a^2) + 2a \frac{1}{2} (a^2 - 2a^2) + \right. \\ &\quad \left. a \frac{1}{2} (-2a^2 - a^2) \right] = -2Eta^3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{kontur} E t(s) ds = 4Eta \quad (12)$$

$$\omega(0) = - \frac{-2Eta^3}{4Eta} = \frac{1}{2} a^2 \quad (13)$$

Den resulterende hvælvingsfunktion ses på figur 8.

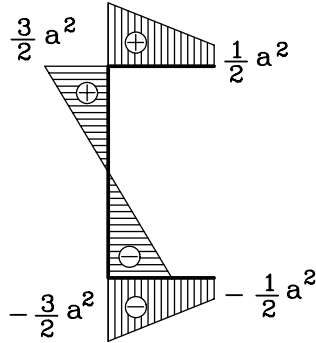


Fig. 8: Hvælvingsfunktion uden resulterende normalkraft

Eksempel slut

Ved at ændre på polen P 's placering ændres hvælvingsfunktionen. I figur 9 er optegnet 2 forskellige placeringer, og det forudsættes, at hvælvingsfunktionen er kendt for P_1 .

Bidraget til hvælvingsfunktionen med pol P_1 for element ds er givet ved

$$r_{P_1} ds = (z^{P_1} - z)dy - (y^{P_1} - y)dz \quad (14)$$

hvor (y, z) angiver koordinaterne til profilet.

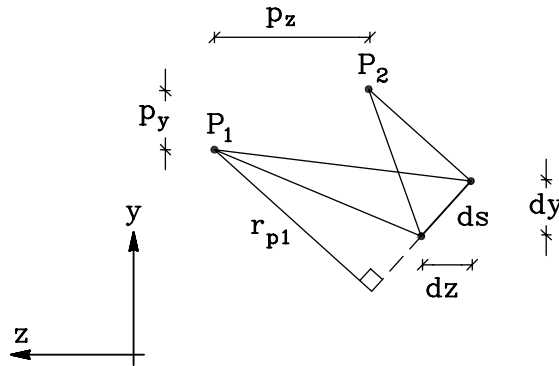


Fig. 9: Forskellige placeringer af pol

Hvælvingsfunktionen med pol P_2 kan bestemmes som:

$$\begin{aligned} \omega^{P_2}(s) &= \omega^{P_2}(0) + \int_0^s r_{P_2} ds = \omega^{P_2}(0) + \int_0^s (z^{P_1} + p_z - z) dy \\ &\quad - \int_0^s (y^{P_1} + p_y - y) dz = \omega^{P_2}(0) + \int_0^s r_{P_1} ds + \int_0^s p_z dy \\ &\quad - \int_0^s p_y dz = \omega^{P_1}(s) + p_z y - p_y z + \omega_{arb} \end{aligned} \quad (15)$$

hvor p_y og p_z angiver ændringen af polen P_2 's koordinater i henholdsvis y og z retningen. Hvælvingsfunktionen med pol P_2 er bestemt på nær en arbitrær konstant ω_{arb} . Formel (15) udsiger, at en ændring i polens placering medfører, at hvælvingsfunktionen ændres lineært svarende til en drejning af profilet som et stift legeme.

Det resulterende moment om z -aksen M_{res}^z bliver

$$M_{res}^z = -\varphi'' \int_{kontur} E t(s) \omega(s) y ds \quad (16)$$

Ved at ændre polens z koordinat sikres, at det resulterende moment er 0, jvf. formel (15). For at kunne foretage ændringer på bøjningsmomenterne om henholdsvis y - og z -aksen uafhængigt er der vigtigt, at y - og z -akserne er valgt således, at de er parallelle med hovedakserne gennem det elastiske center.

Ved en flytning af størrelse 1 ændres momentet om z -retningen med:

$$-\varphi'' \int_{kontur} E t(s) y^2 ds \quad (17)$$

z -koordinaten til omdrejningspunktet, a_z , bestemmes herefter til

$$a_z = z^{P_1} - \int_{kontur} E t(s) \omega(s) y ds / \int_{kontur} E t(s) y^2 ds \quad (18)$$

hvor z^{P_1} angiver koordinaten til polen, der er brugt som udgangspunkt.

Eksempel

Med udgangspunkt i det foregående eksempel findes:

$$\int_{kontur} E t(s) \omega(s) y ds = Et \left[2 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \right) a^2 + \frac{3}{2} a \frac{1}{12} (2a)^3 \right] = 3Eta^4 \quad (19)$$

og

$$\int_{kontur} E t(s) y^2 ds = Et \left[2a^2 a + \frac{1}{12} (2a)^3 \right] = \frac{8}{3} Eta^3 \quad (20)$$

Koordinaten til forskydningscenteret bliver:

$$a_z = \frac{3}{2} a - (3Eta^4) / \left(\frac{8}{3} Eta^3 \right) = \frac{3}{8} a \quad (21)$$

Eksempel slut

Forskydningscenterets placering i y -retningen findes analogt med formel (18) til:

$$a_y = y^{P_1} + \int_{kontur} E t(s) \omega(s) z ds / \int_{kontur} E t(s) z^2 ds \quad (22)$$

I det gennemgående eksempel er udregningen af (22) trivial, idet forskydningscenteret af symmetri grunde må ligge på z -aksen.

Med placeringen af forskydningscenteret kendt foretages en ny beregning af sektorarealerne. Den nye fordeling af $\omega(s)$ sikres ortogonalitet på normalkraften ved at anvende formel (10) igen. Ved at tage udgangspunkt i det elastiske center kan det undgås at anvende formel (10) 2 gange, men det har ingen beregningsteknisk fordel.

Eksempel

Af symmetri Grunde vides, at hvælvingsfunktionen er 0 i midtersnit. Ved at udnytte dette undgås en eksplicit anvendelse af formel (10).

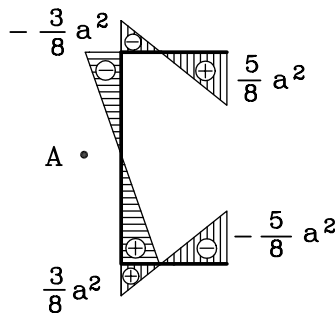


Fig. 10: Hvælvingsfunktion

Karakteristisk for hvælvingsfunktionens udseende er, at den i symmetriske punkter i tværsnittet skifter fortegn.

Eksempel slut

Som grundlag for et edb-program til bestemmelse af hvælvingsfunktionen kan nedenstående opskrift anvendes.

Det forudsættes i første omfang, at der ikke er forgreninger i tværsnittet. Datastrukturen for profilet kan dermed opbygges af et antal fortløbende punktnumre med tilhørende koordinatsæt. E -modul og tykkelse er knyttet til de enkelte elementer, der f.eks. enten er rette eller cirkulære. I figur 11 er datastrukturen skitseret.

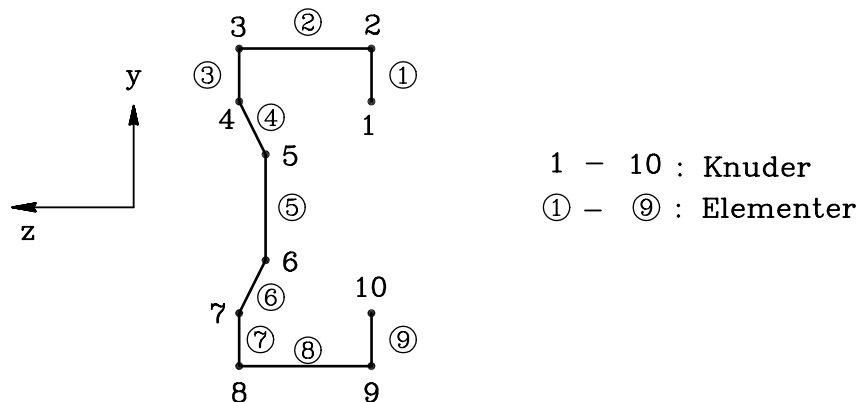


Fig. 11: Datastruktur

Indledningsvis beregnes placeringen af det elastiske center og hovedaksernes retning. Koordinaterne transformeres over i dette hovedaksesystem, og de nye koordinater benyttes i den efterfølgende beregning af hvælvingsfunktionen.

Hvælvingsfunktionen bestemmes i samtlige knuder, og varierer lineært mellem knuderne.

- 1. Trin
Hvælvingsfunktionen udregnes med polen $(0, 0)$ og $\omega(0) = 0$
- 2. Trin
Hvælvingsfunktionen gøres ortogonal på normalkraften vha. formel (10)
- 3. Trin
Forskydningscenterets koordinater bestemmes ud fra formel (18) og (22).
- 4. Trin
Hvælvingsfunktionen udregnes med polen i forskydningscenteret og $\omega(0) = 0$.
- 5. Trin
Hvælvingsfunktionen gøres ortogonal på normalkraften vha. formel (10).

Bestemmelsen af hvælvingsfunktionen for et profil med en datastruktur som vist i figur 11 er enkel, idet knuderne gennemløbes i stigende rækkefølge, og bidraget til hvælvingsfunktionen adderes successivt.

For profiler med forgreninger anvendes den samme fremgangsmåde, men optrævlingen af profilet er lidt vanskeligere rent programmeringsmæssigt.

En alternativ fremgangsmåde er at løse problemet ud fra en elementformulering, hvor de enkelte profildele opfattes som elementer, se [5]. Denne fremgangsmåde vil yderligere have den fordel, at den uden ændringer kan behandle profiler med lukkede ringe, som vist i figur 12.

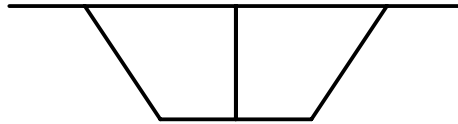


Fig. 12: Tyndvægget ikke enkeltssammenhængende profil

Hvælvingen vil indgå som en ekstra generaliseret flytning for et tyndvægget bjælkeelement. Hvælvingsinertimomentet, $I_{\omega\omega}$, udtrykker tværsnittets stivhed over for hvælvingen, og er defineret ved:

$$I_{\omega\omega} = \int_{kontur} \omega^2(s) t(s) ds \quad (23)$$

Eksempel

Ud fra hvælvingsfunktionen i figur 10 beregnes $I_{\omega\omega}$ direkte:

$$I_{\omega\omega} = t[2a \frac{1}{6} (2 (\frac{5}{8})^2 + 2 (\frac{3}{8})^2 - 2 \frac{5}{8} \frac{3}{8}) a^4 + 2a \frac{1}{6} (2 (\frac{3}{8})^2 + 2 (\frac{3}{8})^2 - 2 \frac{3}{8} \frac{3}{8}) a^4] = \frac{7}{24} a^5 t \quad (24)$$

Hvælvingens inertimoment har enheden m^6 , og tilsvarende har φ'' , der er den anden afledede af vridningen, enheden m^{-2} .

Eksempel slut

Normalspændingerne hidrørende fra hvælving vil, da de ikke er konstante over tværsnittet, resultere i forskydningsspændinger. Disse forskydningsspændinger vil igen resultere i et vridningsmoment, det såkaldte hvælvingsvridningsmoment, M_ω .

Fordelingen af forskydningsspændingerne over tværsnittet findes vha. Grashofs formel, idet beregningen starter fra et punkt, hvor forskydningsspændingen kendes.

På figur 13 er spændingsfordelingen optegnet, og den samlede forskydende kraft per længdeenhed, H .

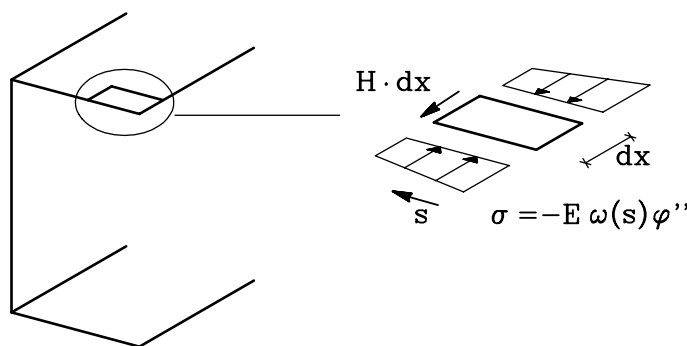


Fig. 13: Forskydningsspændingsfordeling

Ved ligevægt i den aksiale retning fås:

$$H(s_0)dx = - \int_{s=0}^{s_0} \frac{d\sigma}{dx} dx t(s) ds \quad (25)$$

idet der startes i $s = 0$, hvor $H = 0$.

Ved indsættelse af definitionen for σ , (8), findes

$$H(s_0) = \int_{s=0}^{s_0} E \omega(s) t(s) \varphi''' ds \quad (26)$$

idet det antages, at forskydningsspændingen er konstant gennem tværsnittet, findes forskydningsspændingen, $\gamma(s)$, som

$$\gamma(s) = H(s)/t(s) \quad (27)$$

Eksempel

Ud fra hvælvingfunktionen i figur 10 kan forskydningsspændingsfordelingen findes.

Forløbet langs den øverste del, hvor $s_0 \in [0; a]$, findes som:

$$\gamma(s_0) = E\varphi''' \int_{s=0}^{s_0} \left(\frac{5}{8}a^2 - \frac{s}{a}a^2\right) ds = E\varphi''' \left[\frac{5}{8}a^2 s_0 - \frac{1}{2}as_0^2\right] \quad (28)$$

Forløbet langs den nederste del bliver den samme.

Forløbet langs den lodrette del, hvor $s_0 \in [a; 3a]$, findes som:

$$\begin{aligned}\gamma(s_0) &= \gamma(a) + E\varphi''' \int_{s=a}^{s_0} \left(-\frac{6}{8}a^2 + \frac{s}{a}\frac{3}{8}a^2\right)ds \\ &= E\varphi''' \left[\frac{11}{16}a^3 - \frac{3}{4}a^2s_0 + \frac{3}{16}as_0^2\right]\end{aligned}\tag{29}$$

Forskydningsspændingernes variation er optegnet i figur 14.

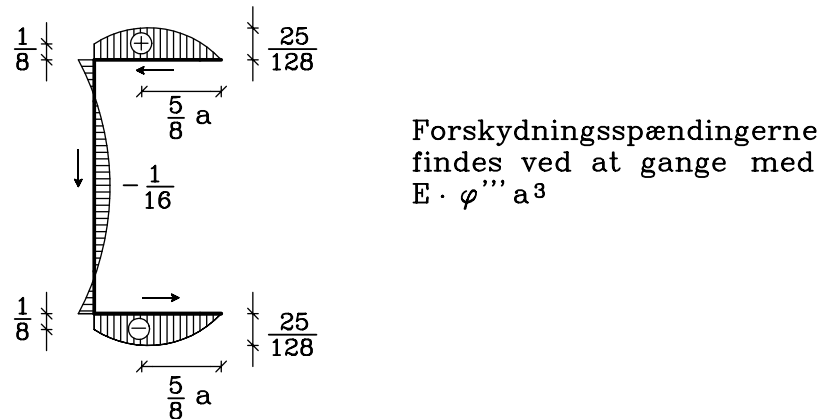


Fig. 14: Forskydningsspændingsfordeling

Der er ingen resulterende forskydende kraft, idet de vandrette bidrag fra henholdsvis øverste og nederste del ophæver hinanden, og idet den lodrette del ikke har nogen resulterende kraft.

Der vil derimod være et resulterende vridningsmoment svarende til M_ω .

Ved at omsætte normalspændingerne fra hvælving til en normalkraft og moment for hver af de 3 pladedele, kan spændingsfordelingen illustreres, som vist i figur 15, og størrelserne er defineret i (30).

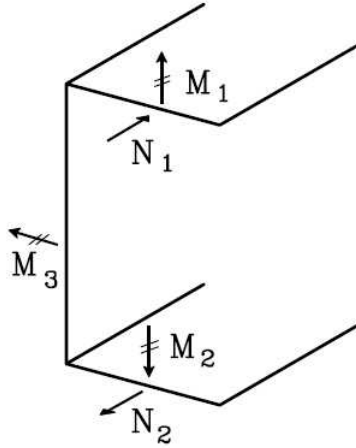


Fig. 15: Resulterende kraftkomponenter fra hvælving

$$\begin{aligned}
 N_1, N_2 &= -\frac{1}{8}a^3\varphi''Et \\
 M_1, M_2 &= -\frac{1}{12}a^4\varphi''Et \\
 M_3 &= \frac{1}{4}a^4\varphi''Et
 \end{aligned} \tag{30}$$

Der er ikke noget resulterende bøjningsmoment, idet N_1 og N_2 's bidrag ophæver M_3 . Bimomentet, der er snitkraften svarende til hvælving, kan illustreres ud fra de 5 snitkraftkomponenter virkende på de 3 pladedele. Fysisk er det ikke så enkelt, som for I-profilet, men det kan ses, at en væsentlig del af bimomentet består af bøjning af henholdsvis øvre og nedre del i hver sin retning.

Eksempel slut

En numerisk beregning af forskydningsspændingsfordeling følger umiddelbart af beregningen af hvælvingfunktionen.

Forskydningsspændingsfordelingen udregnes ud fra kendte værdier i randpunkter, og der skal regnes med en orientering jvf. figur 14. For tværsnit med forgreninger foretages en "optrævling" af profilet, idet der startes fra kendte værdier.

Kapitel 2

Stivhedsmatrix for et tyndvægget bjælkeelement

Indledningsvis betragtes et sædvanligt rumligt bjælkeelement beskrevet med 6 frihedsgrader i hver knude som vist i figur 1. Knudekræfterne regnes med samme fortegnsregning som flytningerne. Fortegnet på drejningsvektorerne er valgt, så de er sammenfaldende med flytningsvektoren. Det betyder, at stivhedsmatricerne for bøjning om henholdsvis y - og z -aksen ikke er ens, da retningen på drejningsvektorerne er forskellige.

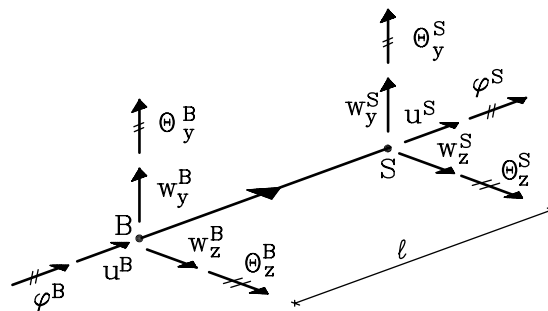


Fig. 1: Rumligt bjælkeelement

Normalkræfterne beskrives ved flytningerne u^B , og u^S , og stivhedsrelationen for denne del er givet ved

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^B \\ u^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x^B \\ R_x^S \end{Bmatrix} \quad (1)$$

hvor det er forudsat, at flytningerne er refereret til tværsnittets elastiske center.

Bøjningsbidraget for bøjning om z -aksen kan, idet der yderligere forudsættes, at flyt-

ningerne er orienteret efter tværsnittets hovedakser, skrives som:

$$\frac{E I_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_y^B \\ \theta_z^B \\ w_y^S \\ \theta_z^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_y^B \\ M_z^B \\ R_y^S \\ M_z^S \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Knudekræfterne, R_y og M_z , er orienteret svarende til de tilsvarende flytningskomponenter. Bjælkens inertimomenter om z -aksen betegnes I_z .

Bøjningsbidraget for bøjning om y -aksen kan, idet der yderligere forudsættes, at flytningerne er orienteret efter tværsnittets hovedakser, skrives som:

$$\frac{E I_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_z^B \\ \theta_y^B \\ w_z^S \\ \theta_y^S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_z^B \\ M_y^B \\ R_z^S \\ M_y^S \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Knudekræfterne, R_z og M_y , er orienteret svarende til de tilsvarende flytningskomponenter. Bjælkens inertimomenter om y -aksen betegnes I_y . Forskellen mellem de 2 stivhedsrelationer skyldes alene fortegnssregningen.

Vridningsbidraget beskrives ved drejningerne φ_B og φ_S , og er givet ved

$$\frac{GI_V}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x^B \\ M_x^S \end{Bmatrix} \quad (4)$$

For elementet kan den samlede stivhedsrelation udtrykkes ved

$$\mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (5)$$

hvor \mathbf{k} sammensættes af normalkraftdelen fra (1), de 2 bøjningsbidrag fra (2) og (3) og endelig vridningsdelen fra (4).

Vridningsbeskrivelsen i det sædvanlige bjælkeelement svarer til, at vridningsvinklen $\varphi(x)$ interpoleres lineært, hvilket giver homogen vridning.

$$\varphi(x) = \varphi_B \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \varphi_S \frac{x}{l} \quad (6)$$

Vridningen giver udelukkende vridningstøjninger.

I det tyndvæggede bjælkeelement skal vridningsbeskrivelsen raffineres, idet ikke-homogen vridning skal kunne behandles. Det sædvanlige bjælkeelement vil have diskontinuitet i den afledede af vridningsvinklen, og det betyder, at bimomentet ikke kan beskrives.

I det tyndvæggede bjælkeelement vil vridnings/hvælvningsdelen afkoble fra normalkraftbidraget og bøjningsbidragene, hvis vridningsdelen beskrives omkring tværsnittets forskydningscenter, som vist i figur 2. Vridningsbeskrivelsen forfines, idet der i begge bjælkeender medtages den afledede af vridningsvinklen som overtallig. Den tilsvarende snitkraft betegnes bimomentet, B .

Tværsnitflytningerne beskrives ud fra forskydningscenteret A, og de tilsvarende forskydningskræfter vil ikke give vridning af profilet. Ved sammensætning af tyndvæggede bjælkeelementer er det helt essentielt, at der tages hensyn til, at flytningerne beskrives ud fra 2 forskellige punkter.

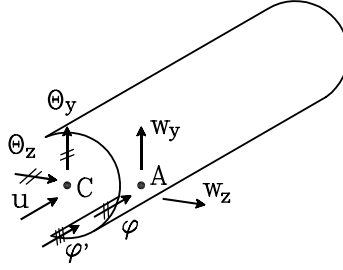


Fig. 2: Tyndvægget bjælkeelement

Ved opstilling af stivhedsmatricen for det udvidede vridningsproblem er der principielt 2 forskellige fremgangsmåder. Enten anvendes den styrende differentiaalligning eller også anvendes en energiformulering vha. virtuelt arbejdes princip eller potentiel energi. Begge metoder vil blive anvendt i det følgende.

Bjælkens styrende differentiaalligning er givet ved

$$M_V = M_S + M_\omega = G I_V \varphi' - E I_{\omega\omega} \varphi''' \quad (7)$$

og for et element uden lokal belastning vil $M_V = \text{konstant}$. Bimomentet, B , er givet ved

$$B = -E I_{\omega\omega} \varphi'' \quad (8)$$

Idet vridningsmomentet er konstant langs elementet, kan de principielle løsninger til (7) skrives som

$$\varphi(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 x + C_4 \quad (9)$$

hvor k er givet ved

$$k^2 = \frac{G I_V}{E I_{\omega\omega}} \quad (10)$$

Stivhedsmatricen kan nu opbygges successivt ved at bestemme koefficienterne C_1 , C_2 , C_3 og C_4 for forskellige randbetingelser på $\varphi(x)$. Denne fremgangsmåde er analog til bestemmelse af stivhedsmatricen for bøjningsdelen, se f.eks. [6]. Der indgår 4 elementartilfælde, hvor der dog reelt kun er 2 principielt forskellige.

Det ene består i en flytning 1 af det ene endepunkt og fastholdelse af begge drejninger og den anden flytning. Det andet består af en drejning 1 af det ene endepunkt og fastholdelse af begge flytninger og den anden drejning.

I vridningstilfædet skal følgende 2 tilfælde undersøges:

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(l) = 0 \quad (11)$$

og

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(l) = 0 \quad (12)$$

De øvrige 2 elementartilfælde findes ved symmetribetragtninger.

Ved indsættelse af de 2 sæt randbetingelser findes nedenstående løsninger.

Tilfælde 1:

$$\varphi(x) = \frac{1}{D} [(1 - \cosh kl) \cosh kx + \sinh kl \sinh kx - kx \sinh kl + 1 - \cosh kl + kl \sinh kl] \quad (13)$$

Tilfælde 2:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{D} \frac{1}{k} [(\sinh kl - kl \cosh kl) \cosh kx \\ & + (1 - \cosh kl + kl \sinh kl) \sinh kx \\ & + (1 - \cosh kl)kx - (\sinh kl - kl \cosh kl)] \end{aligned} \quad (14)$$

hvor

$$D = 2(1 - \cosh kl) + kl \sinh kl \quad (15)$$

Ved differentiation findes umiddelbart udtryk for vridningsmomentet og bimomentet. Herefter kan stivhedsrelationen opstilles og efter relativt simple, men omfattende beregninger findes

$$\frac{E I_{\omega\omega}}{l^3} \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ & & K^{33} & K^{34} \\ \text{sym.} & & & K^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_B' \\ \varphi_S \\ \varphi_S' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{V_B} \\ B_B \\ M_{V_S} \\ B_S \end{Bmatrix} \quad (16)$$

hvor

$$K_{11} = K_{33} = -K_{13} = A kl \sinh kl \quad (17)$$

$$K_{22} = K_{44} = A(\cosh kl - \frac{\sinh kl}{kl})l^2 \quad (18)$$

$$K_{12} = K_{14} = -K_{23} = -K_{34} = A(\cosh kl - 1)l \quad (19)$$

$$K_{24} = A(\frac{\sinh kl}{kl} - 1)l^2 \quad (20)$$

$$A = \frac{(kl)^2}{D} \quad (21)$$

Som det fremgår af ovenstående, indgår hyperbolske funktioner ved beregningen af stivhedsmatricen, og dette kan medføre numeriske problemer for små eller store værdier af kl .

I forhold til det sædvanlige bjælkeelement udvides stivhedsmatricen fra en 2x2 matrix, se (4), til en 4x4 matrix som i (16). Tilsvarende er antallet af frihedsgrader øget med 1 i hver knude. Vridningsstivheden, GI_V , fremgår ikke direkte af (16), men indgår indirekte via k , se (10).

Formfunktionerne for elementet er givet ved (13) og (14) og 2 tilsvarende formler fundet ved passende ombytning. Disse formfunktioner afviger fra kubiske formfunktioner bestemt direkte ved interpolation af $\varphi(l)$ og $\varphi'(l)$. Anvendelse af stivhedsrelationen (16) vil give en eksakt løsning, idet den styrende differentiaalligning, (7), opfyldes.

Et alternativ til ovenstående udledning af stivhedsmatricen kan fås ved at anvende tilnærmede formfunktioner. Dette princip har store fordele ved f.eks. varierende tværsnitskonstanter langs elementaksen og ikke-lineære problemer som stabilitetsberegning (kipning).

Udgangspunktet er enten den potentielle energi eller virtuelt arbejdes princip. I denne forbindelse anvendes det virtuelle arbejdes princip, og der anvendes følgende generaliserede tøjninger.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \varphi' \\ -\varphi'' \end{Bmatrix} \quad (22)$$

hvor φ' svarer til St. Venant vridningen og $-\varphi''$ til hvælvingen. De tilhørende generaliserede spændinger er M_V og B .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_V \\ B \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Den konstitutive lov udtrykkes gennem \mathbf{D} , der er givet ved

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} GI_V & 0 \\ 0 & EI_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (24)$$

og sammenhængen mellem generaliserede spændinger og tøjninger er

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (25)$$

Vridningsvinklen, $\varphi(x)$, interpoleres kubisk, og ud fra kendte bjælkeløsninger for bøjningsproblemet fås:

$$\varphi(x) = \mathbf{N}\boldsymbol{\varphi} \quad (26)$$

hvor \mathbf{N} er flytningsinterpolationsmatricen givet ved:

$$\mathbf{N} = \{ f_1 \quad f_2l \quad f_3 \quad f_4l \} \quad (27)$$

og

$$\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_B \quad \varphi'_B \quad \varphi_S \quad \varphi'_S \}^T \quad (28)$$

Formfunktionerne f_1 , f_2 , f_3 og f_4 er givet ved

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ f_2 &= s - 2s^2 + s^3 \\ f_3 &= 3s^2 - 2s^3 \\ f_4 &= -s^2 + s^3 \end{aligned} \quad (29)$$

hvor s er en dimensionsløs længdeparameter givet ved $s = x/l$.

Ud fra flytningsinterpolationsmatricen \mathbf{N} kan tøjningsinterpolationsmatricen, \mathbf{B} , bestemmes.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi} \quad (30)$$

hvor

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} (-6s + 6s^2)l & (1 - 4s + 3s^2)l^2 & (6s - 6s^2)l & (-2s + 3s^2)l^2 \\ 6 - 12s & (4 - 6s)l & -6 + 12s & (2 - 6s)l \end{bmatrix} \quad (31)$$

Herefter kan stivhedsmatricen for vridningsproblemet bestemmes som:

$$\mathbf{k} = \int_{element} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (32)$$

hvilket svarer til formuleringen af bjælkeproblemet. Ved beregningen af \mathbf{k} kan der umiddelbart tages hensyn til variationer i \mathbf{D} langs bjælkeaksen, idet integrationen kan foretages numerisk.

Idet \mathbf{D} forudsættes konstant, kan (32) løses på sluttet form, og det giver:

$$\mathbf{k} = \frac{E I_{\omega\omega}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{G I_V}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Det bemærkes, at leddet med $EI_{\omega\omega}$ svarer til bøjningsdelen og leddet med GI_V er proportionalt med \mathbf{k}_g matricen for et bjælkeelement. Dette er ikke overraskende, idet $\varphi(x)$ er interpoleret på samme måde som $w(x)$.

Udover fordelene i forbindelse med ikke-lineære problemer og varierende tværsnitkonstanter vil princippet med tilnærmede formfunktioner også lette behandlingen af lokal last på elementet, og numeriske problemer undgås for store eller små værdier af kl .

Spændingsforløbet i elementet beregnet direkte udfra (30) og (25) vil ikke forløbe korrekt og kun i middel svare til de eksakte værdier. Knudekræfterne vil dog være i ligevægt, og bestemmelse af spændinger i elementet findes bedst ved direkte interpolation fra knudeværdier.

Ved bestemmelse af de ækvivalente knudekræfter for fordelt last benyttes den sædvanlige formel.

$$\mathbf{r} = \int_{element} \mathbf{N}^T m_V dV \quad (34)$$

og

$$\mathbf{r} = \int_{element} -\mathbf{N}'^T b dV \quad (35)$$

for henholdsvis et fordelt vridende moment og et fordelt bimoment. \mathbf{N}' er den afledede af vridningsinterpolationsmatricen \mathbf{N} mht. x .

I nedenstående eksempel undersøges nøjagtigheden af den tilnærmede løsning ud fra et konkret eksempel.

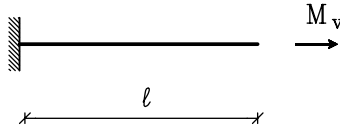


Fig. 3: Vridning af udkraget bjælke

Eksempel

Der betragtes en udkraget bjælke påvirket af et vridningsmoment, som vist i figur 3. Der anvendes et IPE 160 med tværsnitskonstanterne:

$$\begin{aligned} I_V &= 3.62 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ I_{\omega\omega} &= 3.96 \cdot 10^9 \text{ mm}^6 \end{aligned}$$

Materialet er stål med parametrene:

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ G &= 0.8 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Ved anvendelse af (10) fås

$$k^2 = \frac{GI_V}{EI_{\omega\omega}} = 3.48 \text{ mm}^{-2} \quad (36)$$

Der vælges $kl = 5$ svarende til en bjækelængde på

$$l = 2.68 \text{ m} \quad (37)$$

Dette vil være et typisk problem, og det bemærkes, at nøjagtigheden afhænger af kl -værdien.

Randbetingelserne for bjælken gør det kun interessant at opstille den 2×2 matrix, der vedrører den frie ende. Ved indsættelse i (33) og efter lidt regning kan \mathbf{k} udtrykkes ved:

$$\mathbf{k} = \frac{E I_{\omega\omega}}{l^3} \begin{bmatrix} 42 & -8.5l \\ -8.5l & 7.33l^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Af hensyn til den eksakte løsning er det valgt at udtrykke \mathbf{k} ved $EI_{\omega\omega}$. Ved invertering af \mathbf{k} findes

$$\mathbf{k}^{-1} = \frac{l^3}{E I_{\omega\omega}} \frac{1}{235.75l^2} \begin{bmatrix} 7.33l^2 & 8.5l \\ 8.5l & 42 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Vinkeldrejningen i den frie ende findes hermed som

$$\varphi(l) = 0.03109 \frac{M_V l^3}{EI_{\omega\omega}} \quad (40)$$

Den eksakte løsning er givet ved

$$\varphi(l) = (kl - \tanh kl) \frac{M_V}{k^3 EI_{\omega\omega}} \quad (41)$$

Ved indsættelse af $kl = 5$ findes

$$\varphi_{\text{eksakt}}(l) = 0.03200 \frac{M_V l^3}{EI_{\omega\omega}} \quad (42)$$

Afvigelsen er 2.9%, og dette kan forbedres ved at underinddele elementet i 2 eller flere elementer. Det skal bemærkes, at fejlen på snitkræfterne/spændingerne vil blive større, idet disse findes ved differentiation af flytningsfunktionerne. Dette svarer helt til bøjning af elementer med ikke-konstant tværsnit.

Eksempel slut

Ved implementering af tyndvæggede bjælkeelementer i et elementmetodeprogram er følgende forhold særlig vigtige:

- Referere belastning til enten det elastiske center (bøjende momenter og normalkræfter) eller forskydningscenteret (forskydningskræfter og vridningsmomenter).
- Angrebspunktet for den lokale last har betydning bl.a. ved kipning.
- Knuderne får tilknyttet en ekstra overtallig (hvælvingen).
- Kontinuitetskrav for hvælvingen ved samling af forskellige typer elementer.

Både for normale rumlige bjælkeelementer og tyndvæggede bjælkeelementer er der behov for at transformere fra et lokalt 3-retvinklet koordinatsystem til et globalt 3-retvinklet koordinatsystem. Denne transformation behandles i litteraturen normalt ud fra 2 på hinanden følgende drejninger. Dette kan virke noget vanskeligt at håndtere både programmeringsmæssigt og forståelsesmæssigt. Nedenfor er angivet en mere direkte fremgangsmåde. Bjælken er placeret i et globalt koordinatsystem, og enhedsvektorerne \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 og \mathbf{n}_3 angiver bjælkens placering, som vist i figur 4. Bjælkens længdeakse er givet ved \mathbf{n}_1 , og \mathbf{n}_2 og \mathbf{n}_3 angiver retningen af tværsnittets hovedakser.

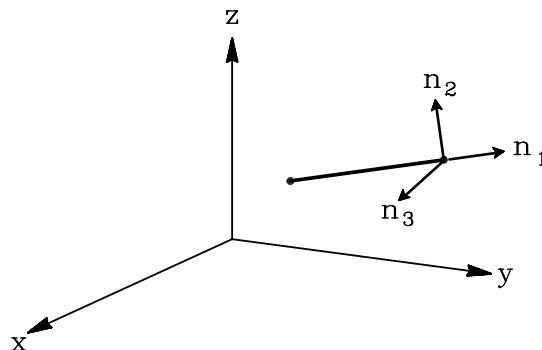


Fig. 4: Rumligt bjælkeelement

En relation mellem flytninger beskrevet i det lokale system og i det globale system kan herefter umiddelbart opskrives.

$$\left\{ \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\}_{\text{lokal}} = \begin{bmatrix} n_1^x & n_1^y & n_1^z \\ n_2^x & n_2^y & n_2^z \\ n_3^x & n_3^y & n_3^z \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\}_{\text{global}} \quad (43)$$

hvor n_1^x betegner vektor \mathbf{n}_1 's x -koordinat i det globale koordinatsystem.

Idet der indføres en transformationsmatrix, \mathbf{T} , kan (43) skrives på matrixform

$$\mathbf{u}_{\text{lokal}} = \mathbf{T} \mathbf{u}_{\text{global}} \quad (44)$$

Drejningsvinklerne vil transformere efter samme system, og derfor kan transformationsmatricen for et rumligt bjælkeelement skrives som vist i (45), hvor det er forudsat, at de overtallige er ordnet svarende til 3 flytninger og 3 drejninger regnet efter samme akse-system. Af hensyn til skrå understøtninger arbejdes der med 2 forskellige transformationer i hver bjælkeende. Ved tyndvæggede bjælkeelementer optræder hvælving som en syvende frihedsgrad. Denne frihedsgrad er at opfatte som en skalar tilknyttet tværsnitsdeformation, og skal derfor ikke transformeres. Til gengæld skal det overvejes, hvorledes hvælvingen overføres mellem de enkelte elementer.

$$\mathbf{T}_{\text{element}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^B & & & \\ & \mathbf{T}^B & & \\ & & \mathbf{T}^S & \\ & & & \mathbf{T}^S \end{bmatrix} \quad (45)$$

Kapitel 3

Stabilitet af tyndvæggede bjælker

3.1 Svigterformer, aksial last

Tyndvæggede bjælker påvirket af ren aksial kraft vil udover den sædvanlige søjleudknækning i 2 retninger kunne få stabilitetssvigt i form af den såkaldte torsions- eller vridningsbuling. Dette stabilitetssvigt illustreres nemmest ved at betragte den korsformede søjle vist i figur 1.

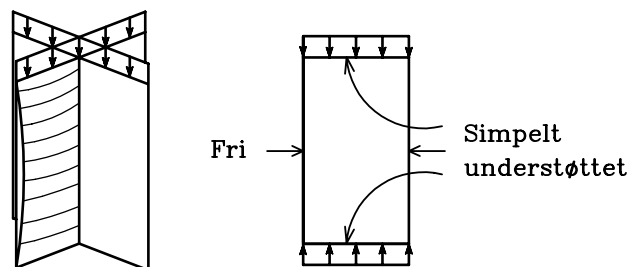


Fig. 1: Korsformet søjle

Den korsformede søjle kan betragtes som 4 plader, som i stabilitetssvigtet bevæger sig ens svarende til en rotation omkring bjælkeaksen. Idet søjlen antages simpelt understøttet i hver ende, bliver randbetingelser for det enkelte pladefelt som vist i figur 1. Den kritiske spænding for en plade med længden ℓ , bredden b og tykkelsen t er

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{b}{\ell}\right)^2 + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2}\right] \quad (1)$$

hvor E er Youngs modulus og ν Poissons forhold.

Stabilitetslasten for torsionsbuling af en korsformet søjle bliver:

$$P_{tors} = 4bt\sigma_{cr} \quad (2)$$

Stabilitetslasten for Euler-udknækning er:

$$P_{Euler} = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} = \pi^2 E \frac{\frac{2}{3}b^3t}{\ell^2} \quad (3)$$

Idet $(b/\ell)^2 \ll 1$ bestemmes forholdet mellem P_{tors} og P_{Euler} til

$$\frac{P_{tors}}{P_{Euler}} = \frac{3}{1 + \nu} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \quad (4)$$

Af formelen ses, at torsionsbuling bestemmer stabilitetssvigtet, hvis ℓ/b er tilstrækkelig lille altså for korte søjler.

For $t/b = 1/20$ og $\nu = 0.3$ findes omslagspunktet mellem Euler-buling og torsionsbuling til $\ell/b \sim 13$.

I tilfældet med den korsformede søjle er der ingen kobling mellem torsionsbuling og Eulerudknækning. I det tilfælde, hvor forskydningscenteret ikke er sammenfaldende med tyngdepunktet, er der en kobling. Svigtformen bliver i dette tilfælde en blanding af bøjning og torsion, og stabilitetslasten er altid lavere end den rene Euler udknækning.

3.2 Svigtformer, tværlast

Der betragtes en simpelt understøttet bjælke påvirket med konstante endemomenter, som vist i figur 2

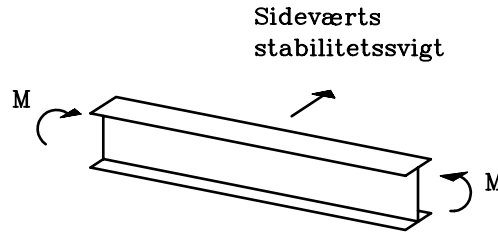


Fig. 2: Kipning af bjælke

Bjælken vil få tryk i oversiden, og denne trykkede del vil forsøge at aflaste sig. Det kan ske ved en kombination af vridning og bøjning om den svage akse. Understøtningsbetingelserne overfor vridning/hvælving har afgørende indflydelse på stabilitetslasten.

For at illustrere beregningsmetoden gennemregnes eksemplet fra figur 2, og retningerne er defineret i nedenstående figur.

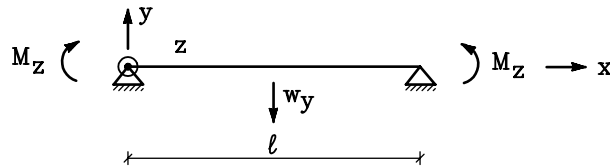


Fig. 3: Bjælke med ren bøjningspåvirkning

I prebucklingtilstanden, der markeres med et superscript 0, gælder:

$$\begin{aligned} M_z^0 &= \text{konst} = -w_{,xx}^y EI_z \\ M_y^0 &= 0 = -w_{,xx}^z EI_y \\ M_v^0 &= 0 = \varphi_{,x} GI_v - \varphi_{,xxx} EI_{\omega\omega} \end{aligned} \quad (1)$$

Ved stabilitetssvigtet sker der en rotation af akseættet x, y, z , således at momentet om z -aksen fra prebucklingtilstanden giver komponenter i de 2 andre retninger. I bucklingtilstanden kommer der et bøjningsmoment om svag akse, M_y^1 og et vridningsmoment M_v^1 . Ligevægtsligningerne, der opstilles i det deformerede system, er givet ved:

$$\begin{aligned} M_y^1 - M_z^0 \varphi^1 &= 0 \\ M_v^1 - M_z^0 w_{,x}^{z\ 1} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Der er udeladt ligevægtsligning for moment om z -akse, idet der ikke kommer bidrag fra de andre retninger, da $M_y^0 = M_v^0 = 0$. Drejningerne af akserne er givet ved φ^1 og $w_{,x}^{z\ 1}$ henholdsvis for x - og y -akse. Da der kun betragtes små vinkler, erstattes $\sin v$ med v . Superscript 1 angiver størrelser for bulingsfeltet.

Indsættes definitionerne for M_y^1 og M_v^1 findes:

$$\begin{aligned} -w_{,xx}^{z\ 1} EI_y - M_z^0 \varphi^1 &= 0 \\ \varphi_{,x}^1 GI_v - \varphi_{,xxx}^1 EI_{\omega\omega} - M_z^0 w_{,x}^{z\ 1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Stabilitetslasten findes som den værdi af M_z^0 der giver egentlige løsninger φ^1 og $w^{z\ 1}$ til (3).

Randbetingelserne for vridningen er gaffellejringer i endepunkterne, hvilket betyder, at tværsnittet ikke kan vride men godt kan hvælve.

Løsningerne kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} w^{z\ 1} &= A \sin \pi \frac{x}{\ell} \\ \varphi^1 &= B \sin \pi \frac{x}{\ell} \end{aligned} \quad (4)$$

Indsættes løsningen i (3) fås:

$$\begin{aligned} EI_y \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 A - M_z^0 B &= 0 \\ -M_z^0 A + (GI_v + EI_{\omega\omega} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2) B &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

For at få egentlige løsninger for A og B skal determinanten være 0, hvilket bestemmer det kritiske moment til:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y (GI_v + EI_{\omega\omega} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2)} \quad (6)$$

Svigtformen er givet ved (4), idet

$$A = \frac{M_{cr}}{EI_y} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot B \quad (7)$$

3.3 Ikke-lineært tøjningsmål

Ved opstilling af elementmetodeligningerne for stabilitetssvigt i sædvanlige bjælker, se [6], indføres et ikke-lineært tøjningsmål, der medtager en aksial forlængelse pga. tværuddbøjning. Normaltøjningen ϵ_x er givet ved:

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^y)^2 + \frac{1}{2}(w_{,x}^z)^2 \quad (1)$$

hvor w^y og w^z er udbøjninger i henholdsvis y - og z -retning.

For at opstille en elementmetodeformulering for tyndvæggede bjælker kræves en tilsvarende opskrivning af det ikke-lineære tøjningsmål.

Der betragtes et tyndvægget profil, som vist i figur 4.

Flytningerne af et punkt i tværsnittet er givet ved:

$$\begin{aligned} w^y(s) &= w^y - z\varphi \\ w^z(s) &= w^z + y\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

hvor w^y , og w^z angivet flytningen af forskydningscenteret i henholdsvis y - og z -retning.

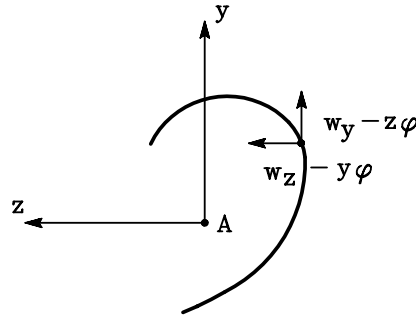


Fig. 4: Tværsnitsprofil

Det ikke-lineære tøjningsmål i aksial retning findes ved at betragte forlængelse af et enkelt punkt i tværsnittet, idet der medtages bidrag svarende til leddene i (1).

$$\epsilon_x = u_{,x} - \omega(s)\varphi_{,xx} + \frac{1}{2}(w^y - \varphi z)_{,x}^2 + \frac{1}{2}(w^z + \varphi y)_{,x}^2 \quad (3)$$

hvor de kvadratiske led afhænger af placeringen i tværsnittet.

Idet den lineære del af tøjningsudtrykket skrives som:

$$\epsilon_x^{\text{lin}} = u_{,x} - \omega(s)\varphi_{,xx} \quad (4)$$

omskrives (3) til

$$\epsilon_x = \epsilon_x^{\text{lin}} + \frac{1}{2}(w_{,x}^y)^2 + \frac{1}{2}(w_{,x}^z)^2 + \frac{1}{2}(\varphi_{,x})^2 (z^2 + y^2) - w_{,x}^y \varphi_{,x} z + w_{,x}^z \varphi_{,x} y \quad (5)$$

Forskellen mellem det sædvanlige udtryk fra (1) og (5), skyldes for det første leddet $\frac{1}{2}(\varphi_{,x})^2 (z^2 + y^2)$, som beskriver torsionsbulning. Dernæst er der leddene med $-w_{,x}^y \varphi_{,x} z$

og $w_{,x}^z \varphi_{,xy}$. Disse led svarer til drejningerne af prebuckling momenterne. I stedet for at indføre dem som aksiale tøjninger, kunne de introduceres som ikke-lineære krumningsmål. Nedenfor er angivet det alternative krumningsmål:

$$\begin{aligned}\kappa_z &= -w_{,xx}^y - w_{,x}^z \varphi_{,x} \\ \kappa_y &= -w_{,xx}^z + w_{,x}^y \varphi_{,x}\end{aligned}\tag{6}$$

De ekstra led til krumningsmålet kan bestemmes ved at betragte drejningen af tværsnittet givet ved $w_{,x}^z$. Denne drejning drejes med φ ind i den anden retning. ændringen af denne vinkel giver krumningstøjningen.

Vridningen af tværsnittet vil også dreje forskydningskræfterne ind i en anden plan. Selvom der ikke opereres med egentlige forskydningstøjninger i bjælketeorien, indføres et ikke-lineært forskydningsmål, der arbejder sammen med forskydningskræfterne i prebucklingtilstanden.

Forskydningstøjningerne defineres svarende til en drejning af tværsnittet kombineret med en vridning.

$$\begin{aligned}\gamma_z &= -w_{,x}^y \varphi \\ \gamma_y &= w_{,x}^z \varphi\end{aligned}\tag{7}$$

Med formlerne (5) og (7) er defineret det ikke-lineære tøjningsmål for en tyndvægget bjælke. Dele af normaltøjningen kan eventuelt opfattes som en krumningstøjning, jvf. (6).

3.4 Geometrisk stivhedsmatrix

Svarende til udledningen i [6] findes den geometriske stivhedsmatrix som

$$\mathbf{k}_g = \int_V \boldsymbol{\sigma}_0 \delta \boldsymbol{\epsilon}^{\text{ikke-lin.}} dV\tag{1}$$

Ved indsættelse af udtryk for de enkelte flytningskomponenter bestemmes dette integral let. Den geometriske stivhedsmatrix består af følgende dele:

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_g^1 & 0 & \mathbf{k}_g^{13} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_g^2 & \mathbf{k}_g^{23} \\ 0 & \mathbf{k}_g^{13T} & \mathbf{k}_g^{23T} & \mathbf{k}_g^3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Normalkraft} \\ \text{Bøjning stærk akse} \\ \text{Bøjning svag akse} \\ \text{Vridning} \end{array}\tag{2}$$

Den geometriske stivhedsmatrix er en 14 x 14 matrix, der kan underopdeles som vist i (2). Euler-buling styres af \mathbf{k}_g^1 og \mathbf{k}_g^2 , der giver udbøjning om henholdsvis stærk og svag akse. Matricerne er identiske med den sædvanlige geometriske matrix. Torsionsbuling styres af \mathbf{k}_g^3 , som stammer fra leddet $\frac{1}{2}(\varphi_{,x})^2 (z^2 + y^2)$, se (5). Normalkraften er den afgørende snitkraft, men hvis forskydningscenteret ikke er sammenfaldende med tyngdepunktet, indgår også momenterne. Kipping styres af matricerne \mathbf{k}_g^{13} og \mathbf{k}_g^{23} . Der indgår primært momenter og

forskydningskræfter, jvf. tøjningsmålene (6) og (7). For profiler hvor forskydningscenter og tyngdepunkt ikke er sammenfaldende, indgår normalkraften også. Dette giver en kobling mellem torsionsbuling og Euler-buling, jvf. afsnit om svigtformer, aksial last.

3.4.1 Placering af belastning

For tyndvæggede bjælker er det væsentligt, hvor lasten angriber i tværsnittet. I figur 5 er der vist en lastplacering, hvor den fordelte last p angriber foroven i tværsnittet.

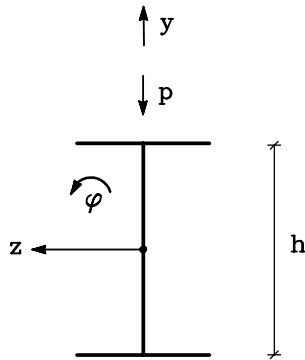


Fig. 5: Last på element

Ved stabilitetssvigtet kan der forekomme en drejning af tværsnittet pga. φ , og der introduceres et vridende moment $h/2 \varphi p$. Hvor der igen regnes med små vinkler. Det virtuelle ydre arbejde fås som

$$A_y = \int_{\ell} \frac{h}{2} p \varphi \delta\varphi dx \quad (3)$$

Ved indsættelse af interpolationsfunktioner for vridningsvinklen skrives dette led som:

$$A_y = \boldsymbol{\varphi}^T \frac{h}{2} p \int_{\ell} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{k}_{load} \delta\boldsymbol{\varphi} \quad (4)$$

hvor der er indført matricen \mathbf{k}_{load} til at beskrive indflydelsen fra lastens placering. Bidraget flyttes over som et indre arbejde, og $-\mathbf{k}_{load}$ kan opfattes som et led i den geometriske matrix. Lasteccentriciteten $h/2$ skal regnes med fortegn. For lasten placeret som vist i figur 5 er leddet destabiliserende, medens en placering i bunden af tværsnittet virker stabiliserende. Lastbidraget ændrer kun direkte på stivheden for vridningsdelen, men i problemer med kobling af bøjning og vridning får det indirekte betydning for bøjningsdelen.

Litteratur

- [1] Vlasov, V. Z.: *Thin-Walled Elastic Beams*, Translated from Russian by the Israel Program for Scientific Translations. US Department of Commerce, National Information Service, TT-61-11400, 1961.
- [2] Kollbrunner, C. F. and Hajdin, N.: *Dünnwandige Stäbe, Band 1 und 2*, Springer-Verlag, 1972.
- [3] Timoshenko, S.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1936.
- [4] Murray, Noel W.: *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [5] Krenk, Steen: *Three-Dimensional Elastic Beam Theory, Part 1 and 2*, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, F 114 and F 115, 1989.
- [6] Damkilde, Lars : *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner*, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, F 118, 1990.
- [7] Petersen, P., Krenk, S. og Damkilde, L.: *Stabilitet af rammer af tyndpladeprofiler*, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, R 265, 1991.
- [8] Krenk, S. and Damkilde, L.: Torsionssteifigkeit und Deformation von Rahmenecken aus I-trägern, *Stahlbau*, 61 (1992), 173-178.