

En introduktion til beregning
af
rammekonstruktioner
med
lineært-elastisk/ideal-plastisk
materialeopførsel

Lars Damkilde

Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer
Danmarks Tekniske Højskole
DK-2800 Lyngby

Oktober 1993

Resumé

Rapporten omhandler beregning af rammekonstruktioner med lineært-elastic/ideal-plastisk materialeopførsel. Udgangspunktet er en lineært-elastic/ideal-plastisk materialemodel for det enkelte fiber i tværsnittet. På basis af denne opstilles en model for tværsnittets opførsel, og denne sammenlignes med en lineært-elastic/ideal-plastisk model på tværsnitsniveau.

Den ikke-lineære sammenhæng mellem last og flytning i en rammekonstruktion beskrives ud fra et eksempel, hvor de enkelte flydeled introduceres et af gangen. Faldgruberne i denne trinvis beregningsmetode omtales herunder de såkaldte "falske" mekanismer.

Nedre- og øvreværdimetoden forklares, og begreberne statisk tilladelig løsning og kinematisk mulig brudfigur eller mekanisme introduceres. Nedreværdimetoden anvendes på et simpelt eksempel, og det vises at løsningen består i et optimeringsproblem (Lineært programmeringsproblem). Øvreværdimetoden anvendes på samme eksempel, og den principielle fremgangsmåde i mekanismekombinationsmetoden beskrives. Øvreværdimetoden kræver bestemmelse af et kinematisk muligt flytningsfelt, og i et appendiks er angivet en systematisk metode til bestemmelse af flytninger og drejninger.

Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset Bjælker & Rammer. Formålet med notatet er at bibringe de studerende en grundlæggende forståelse af beregningsmetoder for lineært-elastiske/ideal-plastiske rammekonstruktioner.

Rammekonstruktioner får p.gr.a plasticiteten en ikke-lineær sammenhæng mellem flytninger og belastning. I notatet beskrives en trinvis beregningsmetode til bestemmelse af last-flytningssammenhængen, og de dertil hørende faldgruber. Endvidere beskrives nedre- og øvre-værdimetoden til bestemmelse af kollapslasten.

Jeg vil gerne rette en tak til Esther Martens, der har tegnet figurerne, og Inge Sørensen, der har renskrevet teksten.

Lyngby, Oktober 1993

Lars Damkilde

Indhold

Symbolliste	iii
1. Materialemodel	1
2. Model for bjælketværsnittet	2
3. Karakteristisk opførsel af rammekonstruktion	6
4. Forenklede beregningsmetoder. Nedre- og øvreværdisætningen	9
5. Eksempel på nedreværdimetoden	11
6. Eksempel på øvreværdimetoden	14
7. Eksempel på mekanismekombinationsmetoden - øvreværdi	17
Appendiks A. Flytningsbeskrivelse	24

Symbolliste

Nedenfor er angivet de væsentligste symboler.

b	Tværsnitbredde
h	Tværsnitshøjde eller højde af rammeben
ℓ	Længde af bjælkeelement
\mathbf{n}	Normalvektor i bjælkens længderetning
$\hat{\mathbf{n}}$	Tværvektor til normalvektor i bjælkens længderetning
t, t_1	Pladetykkelser
u	Flytning af punkt
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$	Flytningsvektor for punkt 1 henholdsvis 2
x	Højde af elastisk zone
x_1	Kraftovertallig (vandret reaktion)
A_{indre}	Indre arbejde
A_{ydre}	Ydre arbejde
M_F	Det plastiske flydemoment
M_P	Moment i tværsnit
$M_{P,ideal}$	Ultimative moment i tværsnit
α	Tværsnittets rotationskapacitet
ϵ_{brud}	Materialets brudtøjning
ϵ_F	Materialets flydetøjning
δ	Flytning i en mekanisme
κ	Tværsnitsskrumning
κ_E	Tværsnitsskrumning ved start af flydning
κ_{brud}	Tværsnitsskrumning ved brud
λ	Lastparameter
λ^-, λ^+	Nedre-, øvre værdi for lastparameter
$\lambda_{elastisk}$	Lastparameter ved 1. flydning
σ_F	Materialets flydespænding
θ	Drejning af bjælkeelement
$\Delta\theta$	Koncentreret drejning i bjælke ("knæk")

1. Materialemodel

Mange materialer som f.eks. stål og beton udviser en materialeopførsel, som kan tilnærmes med en lineært-elastisk/idealplastisk materialemodel. I figur 1 er arbejdskurven for enakset spændingstilstand vist.

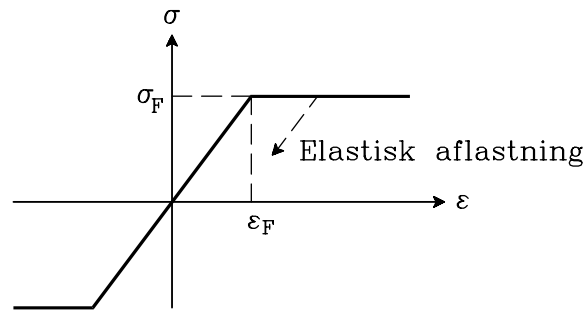


Fig. 1: Arbejdskurve for enakset spændingstilstand

Materialeopførselen betegnes som sej, idet tøjningerne kan stige udover flydetøjningen, ϵ_F , samtidig med, at spændingen forbliver på flydespændingen, σ_F . Denne seje materialeopførsel tillader spændingsomlejring, som får konstruktionen til at kunne modstå en større påvirkning end en rent elastisk analyse ville vise. Stål og beton er typiske eksempler på seje materialer, når man taler konstruktionsanvendelser. Modsætningen til seje materialer er skøre materialer, som f.eks. glas og træ. Denne type materialer svigter, hvis enten spændingen eller tøjningen når en karakteristisk brudværdi.

Ved aflastning reagerer materialet elastisk, som vist i figur 1. Hermed er materialeopførselen i modsætning til den elastiske ikke længere entydig, idet det samme spændingsniveau kan opnås med forskellige tøjningstilstande. Plastiske materialer husker deres spændings/tøjningshistorie, og beregningsmetoderne må baseres på tilvækster i spændinger og tøjninger fremfor de totale størrelser.

I praksis vil de plastiske tøjninger være begrænset af en brudtøjning, ϵ_{brud} , som vil være af størrelsesorden 5-10 gange flydetøjningen, ϵ_F . Denne begrænsning medfører, at plastiske spændingsomlejring ikke altid kan realiseres, og plastiske beregningsmetoder bør ikke anvendes ukritisk.

Den plastiske materialemodel i figur 1 kan generaliseres til 2- og 3-dimensionale spændingstilstande, og betonplader dimensioneres ofte efter brudlinieteorien, som er baseret på en plastisk materialeopførsel. Den plastiske opførsel kan for visse materialer udvise såkaldte hærdenende egenskaber, hvilket vil sige, at spændingen kan stige udover flydespændingen.

2. Model for bjælkets tværsnittet

For plane bjælker er der 2 generaliserede spændinger, normalkraft og bøjningsmoment, og de tilsvarende generaliserede tøjninger, normaltøjningen og krumningen. Tværsnittets plastiske opførsel bliver hermed et 2-dimensionalt problem, idet den plastiske momentkapacitet vil afhænge af den påtrykte normalkraft, som vist i figur 2.

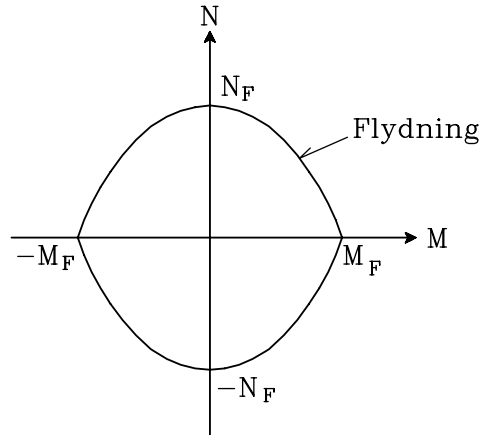


Fig. 2: Flydebetingelse for tværsnit

For betontværsnit kan man udregne de såkaldte M-N diagrammer, der principielt svarer til flydebetingelsen vist i figur 2. Formen af flydebetingelsen afhænger af tværsnittets form. I det følgende forenkles problemstillingen, idet vi kun betragter tværsnittets momentkapacitet. Normalkraften antages at kunne optages uden flydning, og den har ingen indflydelse på flydemomentet, M_F . For konstruktioner, hvor belastningen primært optages ved bøjning, er det en udmærket tilnærmelse, men for slanke, trykpåvirkede konstruktionselementer kan tilnærmelse være noget på den usikre side. Medtagning af normalkraftens indflydelse kræver imidlertid en mere omfattende numerisk beregning, der kun er egnet for edb.

Den tilnærmede flydebetingelse er vist i figur 3.

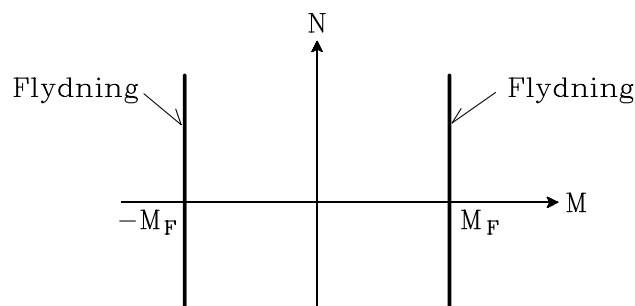


Fig. 3: Forenklet flydebetingelse

Tværsnittets flydemoment kan bestemmes ud fra tværsnittets form og den enaksede arbejds-kurve for de enkelte materialefibre. Nedenfor gennemregnes to typiske tværsnit henholdsvis et massivt tværsnit og et I-profil.

Massivt tværsnit.

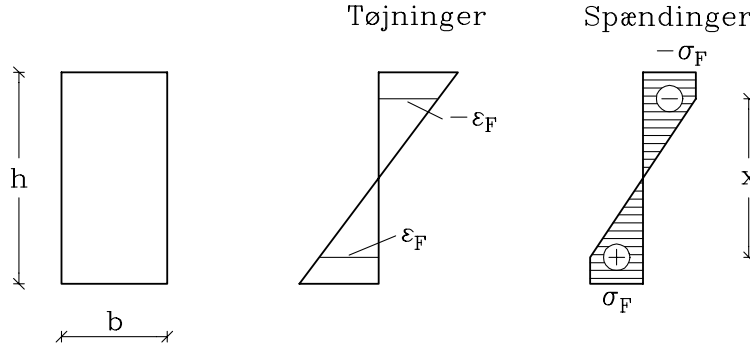


Fig. 4: Plastisk spændingsfordeling

Flydningen begynder ved de yderste fibre, og udstrækningen af den elastiske zone, x , vil ved fuld flydning være forsvundet, som vist i figur 4.

Krumningen, κ , af tværsnittet er givet ved

$$\kappa = \frac{\epsilon_F}{x/2} = \frac{h}{x} \cdot \kappa_E \quad (1)$$

hvor $\kappa_E = \epsilon_F/(h/2)$ angiver krumningen af tværsnittet ved overgangen fra den rent elastiske tilstand til flydning i de yderste fibre.

Det plastiske bøjningsmoment, M_P , bestemmes som:

$$\begin{aligned} M_P &= 2 \cdot \sigma_F \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{1}{12} \cdot \sigma_F \cdot b \cdot x^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sigma_F \cdot b \cdot h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{h}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Ved at indføre tværsnitkrumningen fra (1) og udnytte at $M_{P,ideal} = \frac{1}{4} \sigma_F b h^2$ fås

$$\frac{M_P}{M_{P,ideal}} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\kappa_E}{\kappa}\right)^2 \quad (3)$$

$M_{P,ideal}$ er den ultimative plastiske momentkapacitet, når flydningen er nået ind til midten af tværsnittet. Denne tilstand kræver, at materialet har en uendelig rotationskapacitet, altså at de plastiske tøjninger kan være ubegrænsede. Figur 5 viser moment-krumnings-sammenhængen fra (3).

Svarende til brudtøjningen, ϵ_{brud} , for enakset spændingstilstand defineres et tværsnits rotationskapacitet, α , som:

$$\alpha = \frac{\kappa_{brud}}{\kappa_E} \quad (4)$$

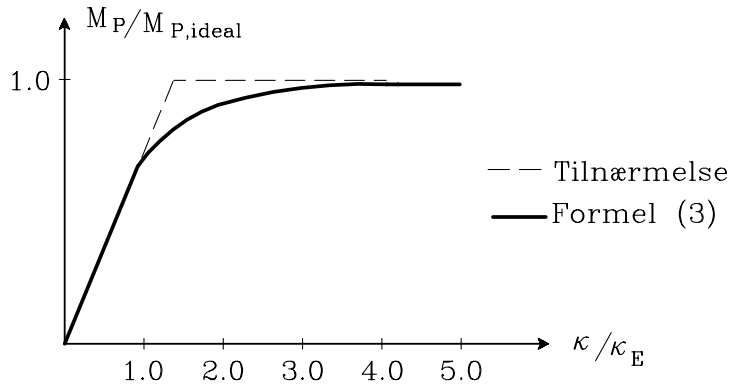


Fig. 5: Moment-krumningsrelation for massivt tværsnit

Hermed findes et massivt tværsnits momentkapacitet som:

$$M_P = M_{P,ideal} \left(1 - \frac{1}{3} \alpha^{-2}\right) \quad (5)$$

Heraf ses, at jo større rotationskapaciteten er, jo nærmere nås den ideale tilstand, hvor alle tværsnittets fibre flyder. For en typisk værdi $\alpha = 5$ findes M_P til 98.7% af $M_{P,ideal}$.

I-profil

Geometrien er vist i figur 6, og der behandles kun dobbeltsymmetriske tværsnit. Plade-tykkelserne regnes for meget små i forhold til øvrige tværsnitsmål.

Det plastiske moment, M_P , kan beregnes som summen af et bidrag fra flangerne og et bidrag fra kroppen. Flangernes bidrag beregnes let, idet de ved overgang fra elastisk tilstand bliver plastiske over hele arealet. Kroppens bidrag kan beregnes svarende til det massive tværsnit.

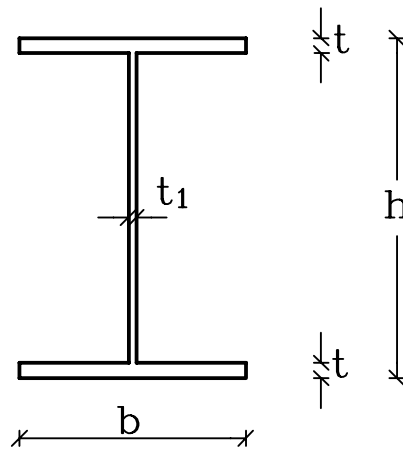


Fig. 6: Geometri af I-profil

$$M_P = 2 \cdot b \cdot t \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f + \frac{1}{4} \cdot \sigma_f \cdot t_1 \cdot h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{h}\right)^2\right) \quad (6)$$

hvor x har den samme betydning som i figur 6.

Ved at lade $x \rightarrow 0$ i formel (6) findes $M_{P,ideal}$

$$M_{P,ideal} = \sigma_F \cdot h(bt + \frac{1}{4}ht_1) \quad (7)$$

Ved omskrivning af (6) findes:

$$\frac{M_P}{M_{P,ideal}} = \frac{b \cdot t + \frac{1}{4}ht_1(1 - \frac{1}{3}(\kappa_E/\kappa)^2)}{b \cdot t + \frac{1}{4}ht_1} \quad (8)$$

For et typisk I-profil med $b = \frac{1}{2}h$, $t = t_1 = \frac{1}{20}h$ findes

$$\frac{M_P}{M_{P,ideal}} = 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{\kappa_E}{\kappa}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9}\alpha^{-2} \quad (9)$$

hvor vi har indført tværsnittets rotationskapacitet, α , defineret i (4).

I forhold til det massive tværsnit ses, at forskellen mellem M_P og $M_{P,ideal}$ for samme rotationskapacitet er mindre. Dette er ikke overraskende, idet det væsentligste bidrag til M_P kommer fra flangerne, og denne del er uafhængig af α .

I praksis tilnærmes moment-krumningsrelationen som en lineært-elastisk/ideal-plastisk model som vist i figur 7.

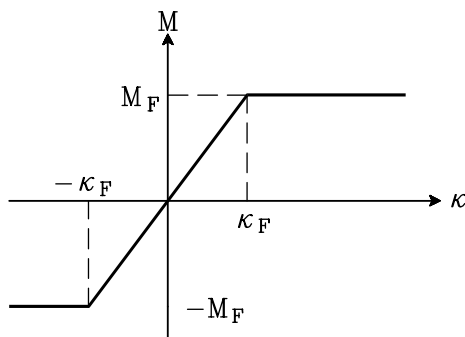


Fig. 7: Idealiseret moment-krumningsrelation

Tilnærmelsen er også vist i figur 5 for det massive tværsnit, og for I-profilet vil tilnærmelsen være endnu bedre.

3. Karakteristisk opførsel af rammekonstruktion

Som et eksempel på en rammekonstruktion betragtes konstruktionen som vist i figur 8.

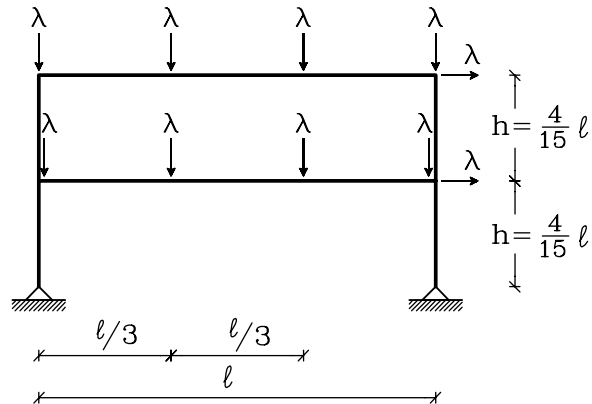


Fig. 8: Rammekonstruktion

Konstruktionen har samme tværsnitskonstanter overalt. En elastisk gennemregning viser, at 1. flydning indtræffer i nederste vandrette bjælke, som vist i figur 9.

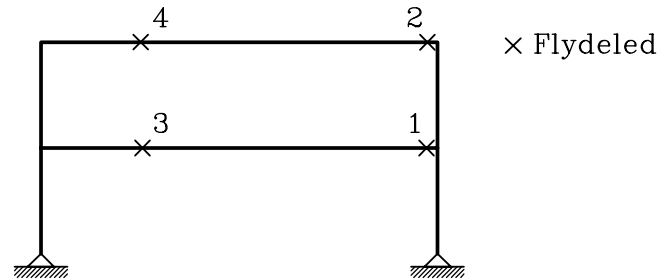


Fig. 9: Flydeled

Hermed er stivheden i punkt 1 mod bøjning forsvundet, men momentet forbliver på flydemomentet, M_F . I den følgende elastiske beregning erstattes punkt 1 med den statiske model vist i figur 10.

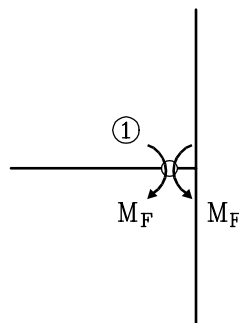


Fig. 10: Statisk model af flydeled

Hermed kan konstruktionens opførsel følges i de forskellige faser, og figur 9 giver rækkefølgen af dannelsen af flydeled.

Når det 4. flydeled dannes, bliver konstruktionen bevægelig, og der er dannet en såkaldt mekanisme, se figur 11. Konstruktionens bæreevne er ved dannelse af mekanismen udtømt. Lastniveauet ved 1. flydning er 63% af den totale bæreevne. Restbæreevnen efter 1. flydning skyldes, at konstruktionen er statisk ubestemt. Ved dannelsen af flydeled åbnes mulighed for plastiske spændingsomlejring, der får konstruktionen til at bære lasten på en mere optimal måde.

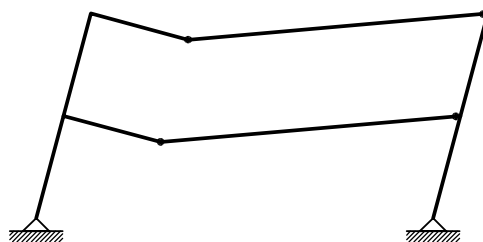


Fig. 11: Kollaps mekanisme

De plastiske spændingsomlejring vil ofte være ledsaget af stærkt stigende flytninger, og i figur 12 er lastniveauet afbildet som funktion af den vandrette flytning af den øverste bjælke.

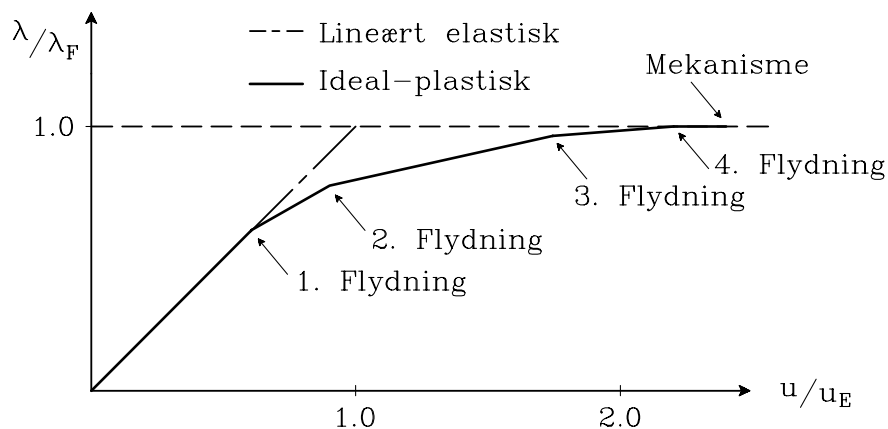


Fig. 12: Last-flytningssammenhæng

Som det fremgår af figuren stiger den vandrette flytning stærkt, efterhånden som de enkelte flydeled dannes. Dette kan have meget uheldig indflydelse på f.eks. stabilitetsforholdene i søjlerne, idet der induceres et større moment fra den lodrette kraft kombineret med den ekstra vandrette udbøjning. For slanke trykpåvirkede konstruktioner bør man derfor ikke ukritisk udnytte de plastiske bæreevnereserver.

Metoden med en trinvis elastisk beregning kan i visse tilfælde undervurdere den plastiske kollaps last. En væsentlig forudsætning for den statiske model i figur 10 er, at tilvæksten i drejningen i charnietet ikke på et senere tidspunkt ændrer fortegn. Hvis det sker, vil konstruktionen undergå en elastisk aflastning, hvilket svarer til, at flydeleddet lukkes. For

komplekse konstruktioner kan det meget let forekomme, idet de forskellige faser illustreret i figur 12 optager lasten på meget forskellige måder. Den trinvise elastiske beregning kan modificeres, så lukning af flydeled kan medtages. Et andet fundamentalt problem er såkaldte falske mekanismer, hvilket mest enkelt illustreres igennem en ramme vist i figur 13.

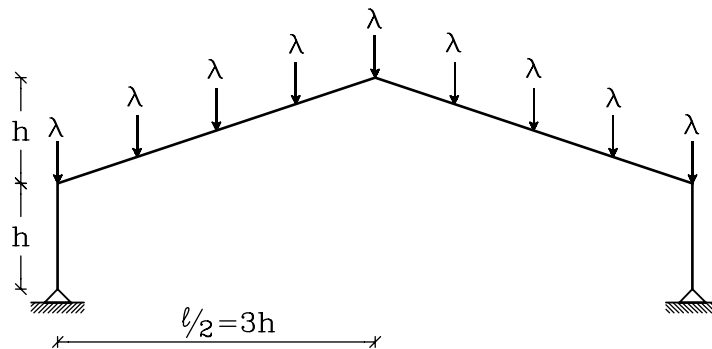


Fig. 13: Ramme

En elastisk beregning giver 1. flydning i hjørnesamlinger, og hermed er der tilsyneladende dannet en mekanisme.

Mekanismens flytninger vil imidlertid betyde, at det ene af de to flydeled lukkes, og dermed er det en ikke mulig mekanisme eller en falsk mekanisme. Vi vil i de efterfølgende kapitler undersøge denne konstruktion mere detaljeret.

Beregningsteknisk er det lidt vanskeligere at tage højde for falske mekanismer, men den trinvise elastiske beregning kan modificeres til også at behandle dette.

4. Forenklede beregningsmetoder. Nedre- og øvreverdisætningen

For mange konstruktioner er der kun behov for at fastlægge den ultimative bæreevne, og der er ikke behov for en detaljeret analyse, der giver last-flytningskurver som vist i figur 12. Til dette formål er der udviklet forenklede beregningsmetoder baseret på henholdsvis nedre- og øvreverdisætningen. Inden for den ideale-plasticitetsteori er det de to mest fundamentale teoremer, som bruges til at fastlægge grænser for bæreevnen. I denne sammenhæng vil vi ikke bevise sætningerne, men henviser til litteraturen.

Nedreværdisætningen

Nedreværdisætningen siger:

Konstruktionen vil kunne modstå en belastning, hvis der findes et snitkraftfelt, som er i ligevægt med belastningen, opfylder alle statiske randbetingelser, og ikke overskrider flydebetingelsen noget sted.

Det valgte snitkraftfelt er ikke nødvendigvis den måde, som konstruktionen bærer lasten på. Nedreværdisætningen siger lidt populært, at konstruktionen altid finder den optimale snitkraftfordeling, således at bæreevnen bliver størst mulig. En helt afgørende forudsætning er materialets uendelig deformations- eller rotationskapacitet, som tillader spændingsomlejringer. I praksis skal man som nævnt i de indledende kapitler overveje gyldigheden af dette. De geometriske randbetingelser indgår ikke i nedreværdisætningen, og det betyder, at de af spændingerne afledte tøjninger ikke nødvendigvis kan integreres op således, at de overholder de geometriske randbetingelser. Det er væsentligt at fastholde, at nedreværdisætningen opererer med et tænkt snitkraftfelt, der ikke behøver at realiseres i konstruktionen.

Snitkraftfelter, der opfylder nedreværdisætningens krav, betegnes statisk tilladelige. For en rammekonstruktion findes et statisk tilladeligt snitkraftfelt lettest ved at gøre konstruktionen statisk bestemt ved at indføre indre charnierer eller fjerne understøtninger. Der er normalt mange muligheder for valg af statisk tilladelige snitkraftfordelinger, og til hvert kan bestemmes en såkaldt nedreværdi, der angiver et tilladeligt lastniveau. Nedreværdisætningen siger, at bæreevnen mindst er den største af alle tænkelige nedreværdier.

Nedreværdisætningen bruges ofte i beregning af bygningskonstruktioner. Ved snitkraftoptagelse ser man f.eks. bort fra lette skillevægge, vinduer m.m., selvom de bidrager omend meget marginalt. Konstruktøren vælger selv de dele, som skal optage belastningen, og naturen sikrer igennem plastiske spændingsomlejringer, at det kan realiseres. Nedreværdisætningen kan dog ikke sikre deformationstilstanden, og ukritisk brug kan medføre, at vinduerne binder eller skillevæggene buler ud. I forbindelse med spændingskoncentrationsproblemer f.eks. ved udmattelse er nedreværdisætningen helt uanvendelig, idet det netop er den virkelige spændingsfordeling, der styrer problemet.

Øvreverdisætningen

Udgangspunktet for øvreverdisætningen er kinematisk mulige brudfigurer, såkaldte mekanismer. I de kinematisk mulige brudfigurer tillades koncentrerede deformationstilstande, der

giver "knæk" i bjælken. Dette idealiseres til en vinkeldrejning i et såkaldt flydeled helt analogt med brudlinier i plader.

Opfattes brudfiguren som et virtuelt flytningsfelt, vil ligevægt kræve, at det indre og ydre arbejde er ens. I det følgende forudsættes, at det ydre arbejde er positivt. Det indre arbejde er en sum over alle flydeled, og hver enkelt flydeled vil bidrage positivt med $|M_F| \cdot |\Delta\theta|$, hvor $\Delta\theta$ er knækket i bjælken. Plasticitetsteorien udsiger, at konstruktionen vil yde den maksimale modstand mod kollaps, og derfor vil hvert flydeled bidrage positivt. Retningen af flydemomenter svarer til, at de forsøger at forhindre en vinkeldrejning.

Ud fra en brudfigur bestemmes en såkaldt øvre- og nedreværdi for lastniveauet, idet det indre og ydre arbejde ækvivaleres.

Øvre- og nedreværdisætningen siger:

Ved en kinematisk mulig brudfigur vil det indre plastiske arbejde være større end det ydre arbejde fra den virkelige kollapslast.

Formuleret lidt anderledes kan man sige, at naturen vil finde den farligste svigt måde blandt alle tænkelige brudfigurer eller mekanismer. Ved anvendelse af øvre- og nedreværdimetoden er man altid på den usikre side, og beregningsopgaven består i at kombinere sig frem til den farligste.

I plasticitetsteorien opereres normalt med flytningstilvækster, men i vores tilfælde kan man uden indskrænkninger betragte flytninger. Det plastiske arbejde betegnes også den plastiske dissipation, og den angives i tilvækster svarende til $|M_F| \cdot |\Delta\theta|$.

Anvendelse af øvre- og nedreværdisætningen vil fastlægge et interval, inden for hvilket den faktiske kollapslast vil ligge. For rammekonstruktioner kan man finde den eksakte kollapslast, hvilket svarer til, at øvre- og nedreværdien er sammenfaldende. Årsagen er, at antallet af brudmekanismer er endeligt, og man derfor kan undersøge samtlige. For pladekonstruktioner er dette ikke generelt muligt, og her er øvre- og nedreværdierne typisk noget tættere på den korrekte kollapslast, selvom de selvfølgelig stadig er på den usikre side.

Øvre- og nedreværdimetoden er normalt den bedste egnede for håndregning, medens nedreværdimetoden lettere lader sig automatisere til edb-beregning. I de to følgende afsnit vil den samme konstruktion blive gennemregnet med henholdsvis nedre- og øvre- og nedreværdimetoden.

5. Eksempel på nedreværdimetoden

Udgangspunktet er en 1 gang statisk ubestemt ramme som vist i figur 14. Denne konstruktion er tidligere omtalt i kap. 3.

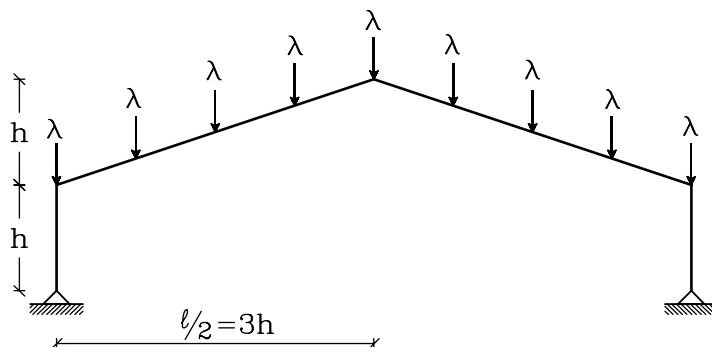


Fig. 14: Rammekonstruktion

Konstruktionen regnes v.h.a. kraftmetoden, hvor vi vælger den vandrette reaktion i højre understøtning, x_1 , som overtallig. Momentkurven er vist i figur 15.

$$M = M_0 + x_1 M_1$$

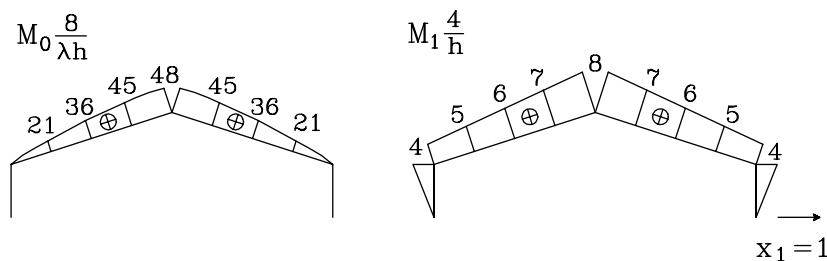


Fig. 15: Momentkurve

Momentkurven er uanset valget af x_1 i ligevægt med belastningen, og for at få en nedreværdi må momentet ingen steder overskride flydemomentet.

Den enkleste måde at bestemme en nedreværdi på er ved at sætte $x_1 = 0$. Dette svarer som omtalt i kapitel 4 til at gøre den højre understøtning vandret bevægelig. Af figur 15 fremgår, at det største moment er i toppen. Ved udregning findes nedreværdien $\lambda_{x_1=0}^-$ til

$$\lambda_{x_1=0}^- = \frac{1}{6} \frac{M_F}{h} \quad (10)$$

Den største nedreværdi findes ved at undersøge samtlige værdier af x_1 .

Momentkurven fra figur 15 skal gøres tilladelig ved at opstille krav i alle de punkter, hvor momentkurven knækker. I (11) er disse uligheder opskrevet:

$$|x_1 h| \leq M_F$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{5}{4}x_1h + \frac{21}{8}\lambda h \right| &\leq M_F \\
\left| \frac{6}{4}x_1h + \frac{36}{8}\lambda h \right| &\leq M_F \\
\left| \frac{7}{4}x_1h + \frac{45}{8}\lambda h \right| &\leq M_F \\
\left| \frac{8}{4}x_1h + \frac{48}{8}\lambda h \right| &\leq M_F
\end{aligned} \tag{11}$$

De 10 uligheder i (11) afgrænser et område i $x_1 - \lambda$ planen inden for hvilket, løsningen er statisk tilladelig. I figur 16 er dette illustreret, idet vi dog kun medtager den del af planen, hvor $\lambda \geq 0$. Det tilladelige (feasible) område er skraveret, og ved at vælge $x_1 = -M_F/h$ findes den største nedreværdi til

$$\lambda^- = \frac{22 M_F}{45 h} \tag{12}$$

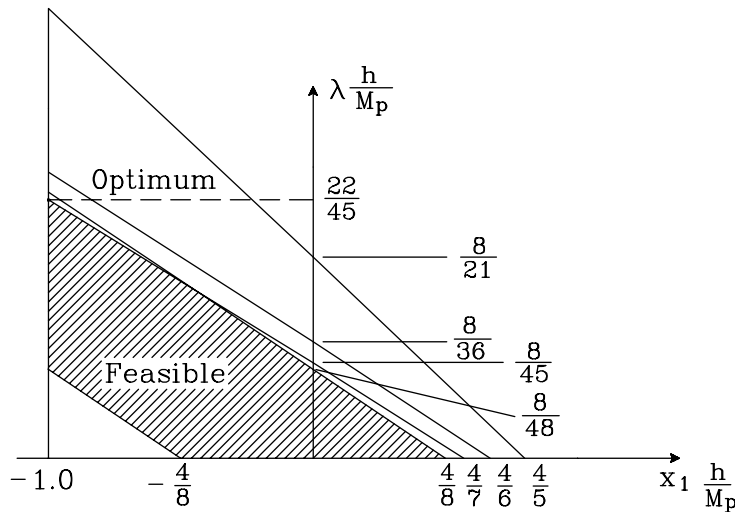


Fig. 16: Løsningsrum for tilladelige løsninger

Den største nedreværdi er samtidig den eksakte kollapslast, idet vi har undersøgt alle tænkelige snitkraftfelter. I næste kapitel bestemmes den mindste øvreværdi til den samme værdi.

Den optimale værdi af λ kan direkte bestemmes grafisk ud fra figur 16. For mere komplekse tilfælde, hvor der er flere statiske overtallige, kan problemet ikke illustreres. Opgaven er et optimeringsproblem, og det svarer til et såkaldt Lineært Programmeringsproblem (LP). Der findes standard metoder til at løse denne form for optimeringsproblemer. Nedreværdimetoden er kun praktisk gennemførlig ved håndregning for 1-2 statisk overtallige, og selv da kan omfanget af beregninger blive betydeligt. Fremgangsmåden er imidlertid enkel, idet man blot skal finde de statisk overtallige, og opstille et antal uligheder. Optimeringsproblemet løses ved hjælp af standardprogrammel.

Forskellen mellem en elastisk og en plastisk beregning er, at vi i den plastiske metode selv kan bestemme værdien af x_1 , hvor den i den elastiske er givet ud fra den geometriske

randbetingelse (ingen vandret flytning i højre understøtning). Til sammenligning vil en elastisk beregning give

$$x_1 = -2.627 \lambda \quad (13)$$

Det største moment findes i hjørnerne, og den maksimale elastiske bæreevne er:

$$\lambda_{elastisk} = \frac{1}{2.627} \frac{M_F}{h} = 0.3807 \frac{M_F}{h} \quad (14)$$

Den plastiske bæreevne er 28.4% større end den elastiske. Udnyttelse af den plastiske bæreevnereserve vil til gengæld give blivende deformationer i bl.a. hjørnesamlingerne. Bygningskonstruktioner dimensioneres ud fra ekstreme påvirkninger, som normalt aldrig optræder i konstruktionens levetid. Blivende plastiske deformationer for meget høje belastningsniveauer vil derfor ikke optræde særligt tit, og man vil i givet fald kunne acceptere reparationer i disse tilfælde. De plastiske deformationer har normalt ingen styrkemæssige konsekvenser.

6. Eksempel på øvreværdimetoden

Vi betragter det samme eksempel som i kapitel 5. Flydeleddene vil kun kunne dannes, hvor momentet bliver maksimalt. I vores tilfælde er der 9 mulige flydeled, som vist i figur 17.

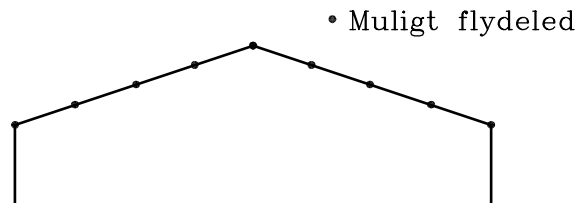


Fig. 17: Mulige flydeled

Da konstruktionen er 1 gang statisk ubestemt, skal der mindst 2 flydeled til for at danne en mekanisme. Antallet af indbyrdes uafhængige mekanismer vil være antallet af mulige flydeled - graden af statisk ubestemthed. I figur 18 er der vist 8 uafhængige brudformer, og normalt karakteriseres mekanismer som enten etage-, bjælke- eller knudemekanismer. Etagemekanismer giver vandrette flytninger, og giver normalt flytninger i hele konstruktionen. Bjælkemekanismen er lokal, og ville medføre svigt i en begrænset del. Knudemekanismer er ikke tilstede i dette tilfælde, og den opstår, hvor et punkt er påvirket af et ydre moment, eller hvor mere end 2 bjælker støder sammen.

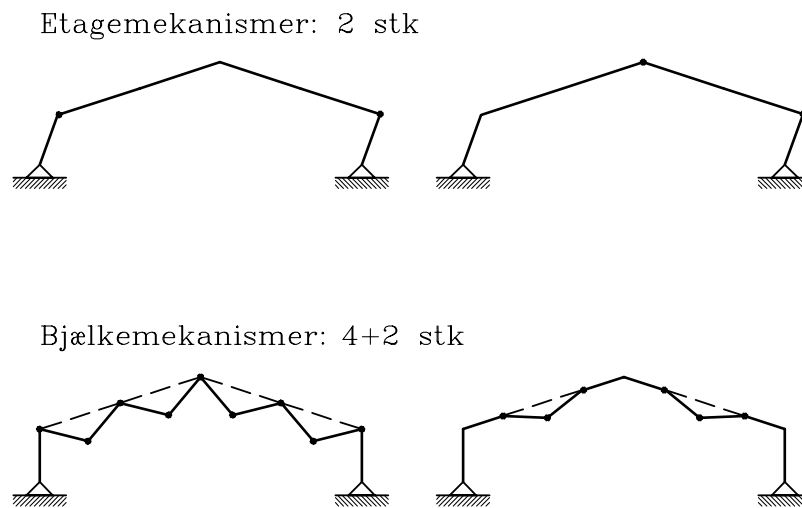


Fig. 18: Uafhængige mekanismer

I konstruktioner, hvor dele er statisk bestemte, kan mekanismer dannes med bare 1 flydeled. Beregningen af antallet af uafhængige mekanismer foretages dog på samme måde.

Ud fra grundmekanismerne kan man kombinere sig frem til nye, og dermed finde den mindste øvreværdi. I kombinationsprocessen opnås kun fremskridt, hvis flydeled lukkes.

På basis af en mekanisme og den dertil hørende øvreværdi kan snitkraftfordelingen bestemmes, og dermed kan man eftervise, om øvreværdien er den eksakte kollapslast eller ej.

I denne sammenhæng vil vi blot gennemregne 2 mekanismer, og vise at de svarer til den eksakte kollapslast.

Ved kombination af etagemekanismer og bjælkemekanismer kan man bestemme en mekanisme som vist i figur 19. Mekanismen udviser symmetriegenskaber svarende til belastningen.

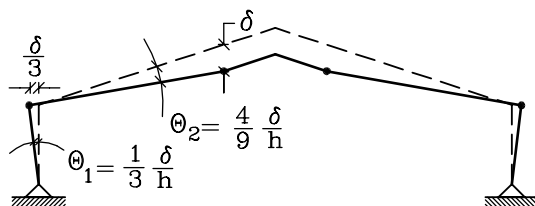


Fig. 19: Symmetrisk brudmekanisme

Ved beregning af mekanismens geometri antages, at alle bjælker bevarer deres længder, og alle flytninger er små. I appendiks A er givet en mere detaljeret beregning af et eksempel på en asymmetrisk mekanisme. På basis af mekanismen kan det indre og ydre arbejde beregnes.

$$A_{ydre} = \lambda \cdot \left(0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + 1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0\right) \delta = 5\lambda \delta \quad (15)$$

hvor det af formlen fremgår, hvilke lodrette flytninger de 9 enkeltkræfter skal ganges sammen med.

$$A_{indre} = (-M_F)(-\theta_1 - \theta_2) + M_F \cdot \theta_2 + M_F \cdot \theta_2 + (-M_F)(-\theta_1 - \theta_2) \quad (16)$$

Hvert flydeled bidrager positivt, men af formlen fremgår fortegnet af momentet, idet der er underside på indersiden af rammen. Vinklen i hjørnerne bliver mindre, og dermed er momentet negativt, idet et flydemoment forsøger at fastholde en uændret deformationstilstand.

Ved indsættelse af udtrykkene for θ_1 og θ_2 fra figur 19 udregnes.

$$A_{indre} = M_F \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{h} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{22}{9} \frac{M_F}{h} \delta \quad (17)$$

Øvreværdien for mekanismen findes ved at sætte $A_{indre} = A_{ydre}$

$$\lambda^+ = \frac{22}{45} \frac{M_F}{h} \quad (18)$$

Ud fra disse øvreværdier samt kendskab til retning og størrelse af momentet i flydeleddene kan den resterende del af momentkurven udregnes. Hvis der ikke er momenter, der overskrider flydemomentet, har man eftervist, at øvreværdien også er den eksakte bæreevne. I dette eksempel udelades denne eftervisning, og fra kapitel 5 vides, at øvreværdien falder sammen med nedreværdien.

Ved andre kombinationer af etage- og bjælkemekanismer kan man nå frem til en asymmetrisk mekanisme vist i figur 20. I appendiks A er givet en detaljeret beregning af mekanismens flytningstilstand.

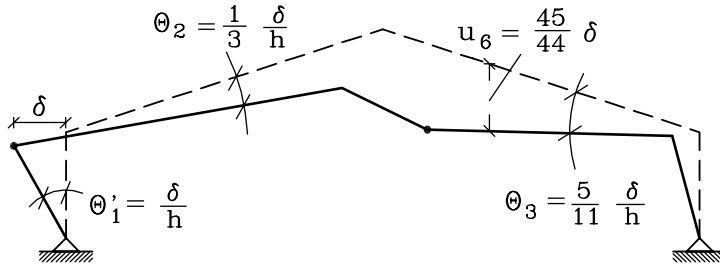


Fig. 20: Asymmetrisk mekanisme

I figur 20 regnes vinkeldrejningerne af de enkelte bjælkeled med fortegn. Dette blev ikke gjort i det forrige eksempel for på mere enkel vis at udnytte symmetrien. Udfra flytningsfeltet bestemmes det ydre arbejde som:

$$A_{ydre} = \lambda \cdot u_6 \cdot (0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0) = \lambda \cdot \frac{45}{11} \delta \quad (19)$$

hvor u_6 er den lodrette flytning af det højre flydeled.

Det indre arbejde udregnes til

$$\begin{aligned} A_{indre} &= (-M_F)(-\theta_1 + \theta_2) + (M_F)(-\theta_2 + \theta_3) \\ &= M_F \cdot \frac{\delta}{h} \left(\frac{14}{11} + \frac{8}{11} \right) = M_F \cdot \frac{\delta}{h} \cdot \frac{22}{11} \end{aligned} \quad (20)$$

Øvreværdien vil også for dette tilfælde give den eksakte kollapslast på $\lambda^+ = 22/45 M_F/h$. De geometriske beregninger er langt mere omfattende i det sidste eksempel, idet vi ikke kan udnytte nogen former for symmetri. Fortegnet på flydemomentets retning bestemmes som tidligere nævnt udfra, at hvert delbidrag til det indre arbejde skal være positivt.

7. Eksempel på mekanismekombinationsmetoden - øvre-værdimetoden

Vi betragter konstruktionen vist i figur 21 som svarer til eksemplet fra kapitel 3.

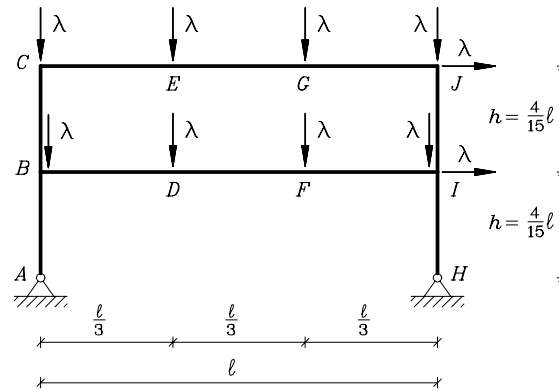


Fig. 21: Konstruktion

Konstruktionen er 4 gange statisk ubestemt, idet den kan gøres statisk bestemt ved f.eks. at snitte konstruktionen over i D (3 overtallige) og fjerne den vandrette reaktion i H (1 overtallig). Der er mulighed for 12 flydede. I C, E, G, J, D og F kan der dannes 1 flydede, medens der i B og I kan dannes 3.

Det betyder, at der er:

$$12 - 4 = 8 \quad \text{uafhængige mekanismer} \quad (21)$$

Der er fire uafhængige bjælkemekanismer, som vist i Figur 22.

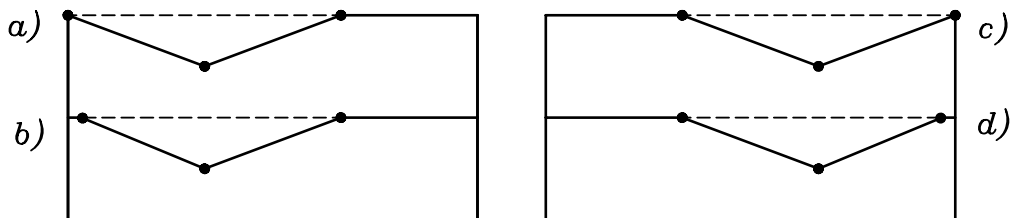


Fig. 22: 4 bjælkemekanismer

Der er 2 etagemekanismer, som vist i Figur 23.

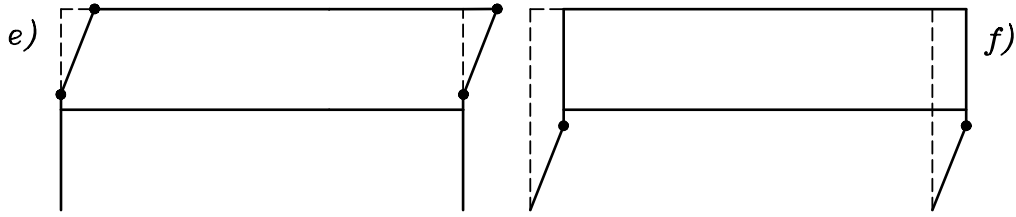


Fig. 23: 2 etagemekanismer

Der er endvidere 2 knudemekanismer i henholdsvis B og I, men de benyttes kun i de senere kombinationer.

Først beregnes øvre værdien for bjælkemekanismen, idet det bemærkes at **a-d** er ens.

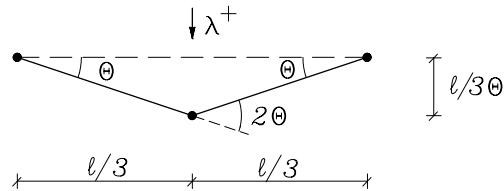


Fig. 24: Geometri for bjælkemekanisme

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ \frac{\ell}{3} \theta \\ A_i &= M_F \theta + M_F 2\theta + M_F \theta = 4M_F \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = 12 \frac{M_F}{\ell} \quad (22)$$

Ved at kombinere **a** og **c** findes en farligere mekanisme. Der er et større ydre arbejde samtidig med, at det indre arbejde bliver mindre

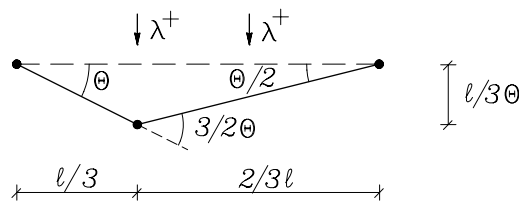


Fig. 25: Kombineret bjælkemekanisme

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ \frac{\ell}{3} \theta + \lambda^+ \frac{\ell}{3} \frac{1}{2} \theta = \lambda^+ \frac{\ell}{2} \theta \\ A_i &= M_F \theta + M_F \frac{3}{2} \theta + M_F \frac{1}{2} \theta = 3M_F \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = 6 \frac{M_F}{\ell} \quad (23)$$

I mekanismekombinationen opnås kun fremskridt, hvis et af flydeleddene lukkes. I eksemplet er det flydeleddet i G, der lukkes.

Det er umiddelbart klart, at etagemekanisme **f** er farligere end **e**, da både det ydre arbejde er større og det indre arbejde mindre.

For fuldstændighedens skyld gennemregnes begge

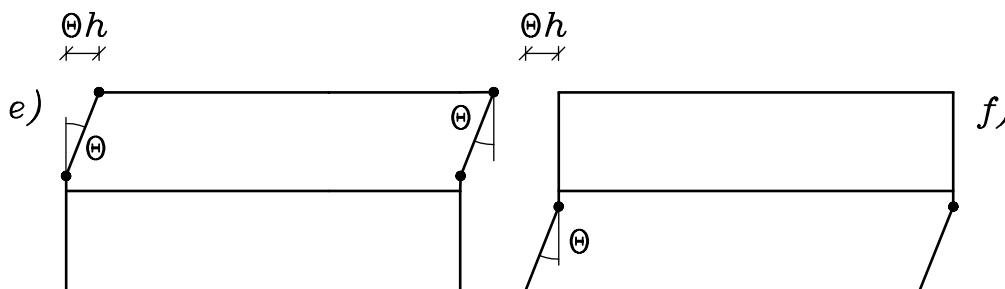


Fig. 26: Etagemekanismer

Mekanisme **e**:

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ h \theta \\ A_i &= M_F (\theta + \theta + \theta + \theta) = 4 M_F \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = 4 \frac{M_F}{h} = 15 M_F \quad (24)$$

Mekanisme **f**:

$$\left. \begin{aligned} A_y &= 2 \lambda^+ h \theta \\ A_i &= M_F (\theta + \theta) = 2 M_F \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{15 M_F}{4 \ell} \quad (25)$$

Herefter kombineres mekanismer sammen. Mekanisme **f** og en bjælkemekanisme i BI svarende til den i figur 25 kombineres, idet der også anvendes knudemekanismen i B.

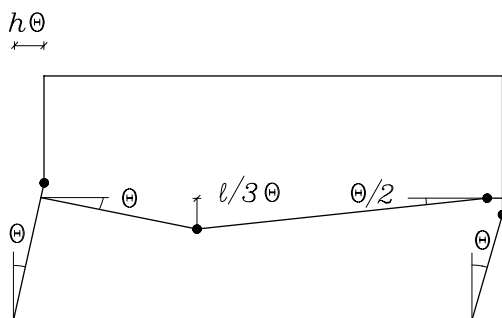


Fig. 27: Kombination etage/bjælke

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ h \theta + \lambda^+ h \theta + \lambda^+ \frac{\ell}{3} \theta + \lambda^+ \frac{\ell}{6} \theta \\ A_i &= M_F \theta + M_F (\theta + \frac{\theta}{2}) + M_F \frac{\theta}{2} + M_F \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{120}{31} \frac{M_F}{\ell} \quad (26)$$

hvilket ikke er mere kritisk end mekanisme **f**. Ved at addere en etagemekanisme som **e** og en knudemekanisme i I fås:

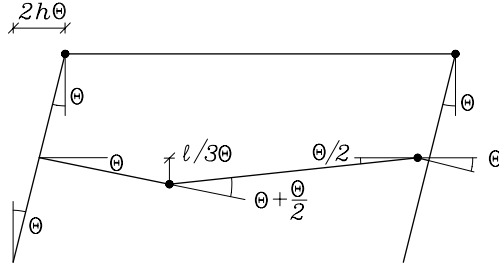


Fig. 28: Kombination e + f + bjælkemekanisme

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ 2h\theta + \lambda^+ h\theta + \lambda^+ \frac{\ell}{3}\theta + \lambda^+ \frac{\ell}{6}\theta \\ A_i &= M_F\theta + M_F(\theta + \frac{\theta}{2}) + M_F(\theta + \frac{\theta}{2}) + M_F\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{150}{39} \frac{M_F}{\ell} \quad (27)$$

Denne mekanisme er heller ikke mere kritisk end etagemekanisme **f**. For at illustrere principperne vælges alligevel at undersøge spændingstilstanden i mekanismen. Vi betragter bjælke CJ, og ønsker at bestemme momentet i E.

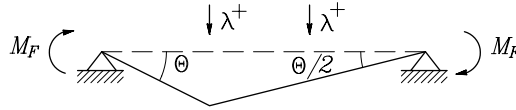


Fig. 29: Check af bjælke CJ

Virtuelt Arbejdes Princip anvendes med det viste virtuelle tøjningsfelt.

$$\begin{aligned} A_i &= M_E \frac{3}{2}\theta \\ A_y &= M_F\theta + \lambda^+ \frac{\ell}{3}\theta + \lambda^+ \frac{\ell}{6}\theta + M_F(-\frac{\theta}{2}) \end{aligned} \quad (28)$$

idet $\lambda^+ = 150/39M_F/\ell$ findes:

$$M_E = \frac{21}{13}M_F \quad (29)$$

Ved anvendelse af Virtuelt Arbejdes Princip opfattes snitmomenterne i C og J som ydre belastning, men det kan også opfattes som indre arbejde, hvor der så skal skiftes fortegn. Ved undersøgelsen af momentet er retningen af flydemomenterne helt afgørende. Momentfordelingen i bjælkerne BI og CJ kan findes på tilsvarende måde, og det viser sig af momentet i E er størst. Momenterne i søjlerne er statisk ubestemte, da overførslen af kræfter mellem de 2 dele afhænger af den aksiale stivhed af bjælkerne, men de kan i overensstemmelse med nedreværdisætningen vælges, jvf. senere omtale. Ud fra at ME er det største moment kan en nedreværdi bestemmes som

$$\lambda^- = \frac{150}{39} \frac{M_F}{\ell} \frac{13}{21} = \frac{50}{21} \frac{M_F}{\ell} \quad (30)$$

som er ca. 29% under kollapslasten, der bestemmes senere.

Med udgangspunkt i mekanismen i Figur 28 og beregningen, der viste for stort moment i E, bestemmes en ny mekanisme som kombination af mekanismerne i Figur 28 og 25.

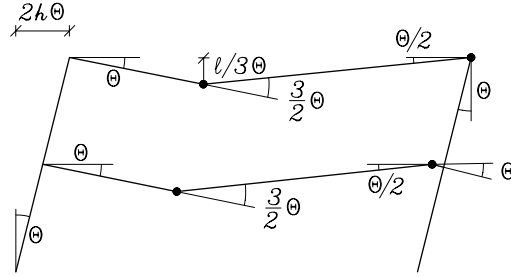


Fig. 30: Kollapsmekanisme

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \lambda^+ 2h\theta + \lambda^+ h\theta + 2\left(\lambda^+ \frac{\ell}{3}\theta + \lambda^+ \frac{\ell}{6}\theta\right) \\ A_i &= M_F \frac{3}{2}\theta + M_F\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) + M_F \frac{3}{2}\theta + M_F\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{10}{3} \frac{M_F}{\ell} \quad (31)$$

For at undersøge om denne mekanisme er i orden bestemmes momenterne i bjælken CJ efter samme metode som før.

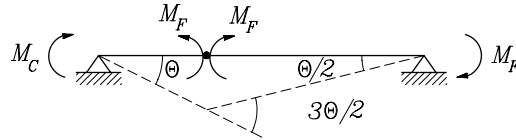


Fig. 31: Momentbestemmelse

$$M_C\theta - M_F \frac{3}{2}\theta - M_F \frac{\theta}{2} + \lambda^+ \left(\frac{\ell}{3}\theta + \frac{\ell}{6}\theta\right) = 0 \quad (32)$$

hvilket giver

$$M_C = \frac{1}{3}M_F \quad (33)$$

Momentet i G findes til

$$M_G = \frac{5}{9}M_F \quad (34)$$

Momentfordelingen i bjælke BI bliver tilsvarende.

Momenterne i søjlerne kan ikke bestemmes ved ligevægtsligninger alene. Ved hjælp af etagemekanisme **f** kan bestemmes et udtryk for differencen af momenterne i søjlerne.

$$M_B^A\theta - M_I^H\theta = 2\lambda^+ h\theta \quad (35)$$

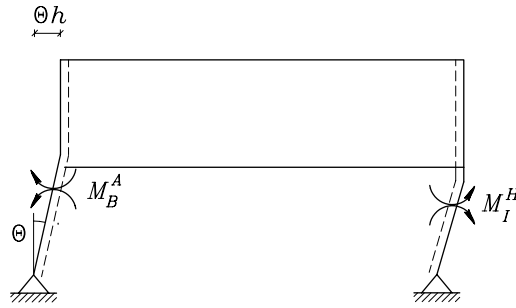


Fig. 32: Momentbestemmelse

hvilket ved indsættelse af $\lambda = 10/3M_F/\ell$ giver

$$M_B^A - M_I^H = \frac{16}{9}M_F \quad (36)$$

I overensstemmelse med nedreværdimetoden vælges en fordeling mellem de 2 søjler.

$$\begin{aligned} M_B^A &= \frac{8}{9}M_F \\ M_I^H &= -\frac{8}{9}M_F \end{aligned} \quad (37)$$

Knudeligevægt af henholdsvis B og I medfører

$$\begin{aligned} M_B^C &= -\frac{1}{3}M_F + \frac{8}{9}M_F = \frac{5}{9}M_F \\ M_I^J &= M_F - \frac{8}{9}M_F = \frac{1}{9}M_F \end{aligned} \quad (38)$$

En kontrol med etagemekanisme **e** giver

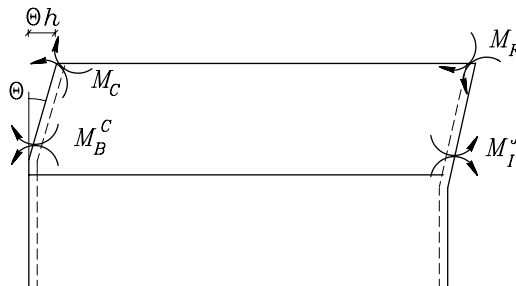


Fig. 33: Kontrolberegning

$$-M_B^C\theta + M_C\theta + M_I^J\theta + M_F\theta = \lambda^+h\theta \quad (39)$$

hvilket ved indsættelse af $\lambda = 10/3M_F/\ell$ giver

$$M_I^J - M_B^C = \left(\frac{10}{3} \frac{4}{15} - \frac{1}{3} - 1\right)M_F = -\frac{4}{9}M_F \quad (40)$$

hvilket stemmer med de beregnede værdier.

Da der nu er fundet en statisk tilladelig snitkraftfordeling, hvor flydemomentet ikke er overskredet, er øvre værdien $\lambda^+ = 10/3M_F/\ell$ også en nedreværdi, og dermed er kollapslasten og kollapsformen bestemt.

Appendiks A. Flytningsbeskrivelse

I dette appendiks gennemgås beregningen af flytningsfelter ud fra en systematisk beregningsmetode. For simple flytningsfelter er det for den trænede ofte langt nemmere "at kigge sig til løsningen". Appendiks er tænkt som en vejledning til den utrænede, der så gradvist lærer at se løsningen. Endvidere kan fremgangsmåden være nyttig ved konstruktioner med mange skæve vinkler, hvor selv den trænede kan have vanskeligt ved umiddelbart at se løsningen.

Vi betragter et bjælkeelement som vist i figur 34.

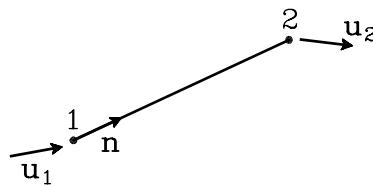


Fig. 34: Flytninger af bjælkeelement

Bjælkens retning er defineret ved enhedsvektoren \mathbf{n} , og flytningsvektorerne i de 2 ender betegnes \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 .

Idet bjælkens længde skal være uforandret høves:

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (41)$$

Bjælkens drejning, θ , regnes positiv mod uret, og er givet ved:

$$\theta = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \ell^{-1} \quad (42)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ betegner \mathbf{n} 's tværvektor, og ℓ bjælkens længde. I en rumlig beskrivelse havde man valgt krydsprodukter fremfor tværvektorer.

Vi vil nu betragte eksemplet fra kapitel 5 med den asymmetriske mekanisme. Konstruktionen består af 3 dele, A, B og C, som vist på figur 35.

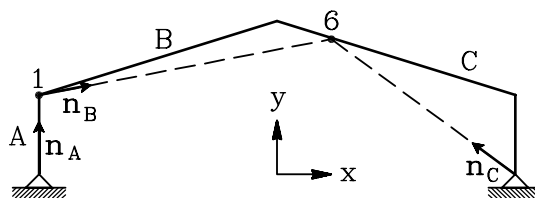


Fig. 35: Opdeling af konstruktion

Antallet af flytningsovertallige er 7: 3 drejninger af bjælkedelene A, B og C samt lodrette og vandrette flytninger i punkt 1 og 6. Idet rammen skal bibeholde sin kontinuitet, er der 6 geometriske randbetingelser: Lodrette og vandrette flytninger i punkt 1 henholdsvis 6 skal være ens set fra begge tilstødende elementer, og endelig skal drejningen af A og C

foregå om understøtningerne. Opgaven er nu at bestemme de indbyrdes forhold mellem de flytningsovertallige på basis af de geometriske bånd.

Umiddelbart ses, at den lodrette flytning af punkt 1 er 0, da drejningen af A skal foregå om venstre understøtning. Endvidere sættes den vandrette flytning af 1 arbitrært til $-\delta$. Drejningen af del A bliver hermed δ/h .

$$\begin{aligned} u_x^1 &= -\delta \\ u_y^1 &= 0 \\ \theta_A &= \frac{\delta}{h} \end{aligned} \tag{43}$$

Retningsvektorerne for de 3 dele, A, B og C, udregnes nemt til

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &= (0, 1) \\ \mathbf{n}_B &= \frac{1}{\sqrt{26}}(5, 1) \\ \mathbf{n}_C &= \frac{1}{\sqrt{130}}(-9, 7) \end{aligned} \tag{44}$$

De tilsvarende bjækelængder er:

$$\begin{aligned} \ell_A &= h \\ \ell_B &= \frac{h}{4}\sqrt{234} \\ \ell_C &= \frac{h}{4}\sqrt{130} \end{aligned} \tag{45}$$

Da drejningen af B skal foregå om højre understøtning, bliver flytningen af punkt 6 rettet efter $\hat{\mathbf{n}}_C$.

Vi betragter del B og bestemmer flytningen af de 2 endepunkter som:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^B &= (-\delta, 0) \\ \mathbf{u}_2^B &= u^6 \hat{\mathbf{n}}_C = u^6 \frac{1}{\sqrt{130}}(-7, -9) \end{aligned} \tag{46}$$

hvor u^6 er størrelsen af flytningen i punkt 6.

Anvendelse af ustrækkelighedsbetingelsen fra 41 giver:

$$(\mathbf{u}_2^B - \mathbf{u}_1^B)\mathbf{n}_B = 0 \tag{47}$$

Ved indsættelse bestemmes:

$$u^6 = \frac{5}{44} \cdot \sqrt{130} \delta \quad (48)$$

Retningen af u^6 er som $\hat{\mathbf{n}}_C$, og man kan umiddelbart bestemme x- og y-komponenterne.

$$\begin{aligned} u_x^6 &= -\frac{35}{44} \delta \\ u_y^6 &= -\frac{45}{44} \delta \end{aligned} \quad (49)$$

På basis af formel 42 udregnes vinkeldrejningerne af henholdsvis B og C.

$$\begin{aligned} \theta_B &= (\mathbf{u}^6 - \mathbf{u}^1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_B \ell_B^{-1} \\ &= \ell_B^{-1} \left(\left(-\frac{35}{44} \delta - (-\delta) \right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{26}} + \left(-\frac{45}{44} \delta \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} \right) = -\frac{3}{11} \cdot \frac{\delta}{h} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\theta_C = \mathbf{u}^6 \cdot \mathbf{n}_C \ell_C^{-1} = \frac{5}{11} \frac{\delta}{h} \quad (51)$$

Hermed er mekanismens geometri fastlagt. Valget er u_x^1 er arbitrært, og valgt således, at det ydre arbejde er positivt. De øvrige flytningsovertallige er proportionale med u_x^1 , idet vi kun regner med små flytninger.

De lodrette flytninger under enkeltkræfterne findes ved lineær interpolation mellem værdierne i endepunkterne.