Influenslinier

Lars Damkilde

Institut for Kemi og Anvendt Ingeniørvidenskab
Aalborg Universitet Esbjerg
DK-6700 Esbjerg

September 2002

Resumé

Rapporten omhandler beregning af influenslinier for rammekonstruktioner. Ved en influenslinie forstås en funktion, $\delta^i(s)$, som giver størrelsen af virkningen (influensen) i et punkt, i, for en enhedspåvirkning i punktet med koordinaten s. Virkningen kan være et bøjningsmoment midt på en bjælke, og påvirkningen kunne stamme fra en last et vilkårligt sted på bjælken.

Indledningsvis behandles influenslinier for flytninger. Betti's sætning tillader at problemet redefineres til at finde flytningsfeltet for en enhedslast virkende i det punkt, hvor influensen skal bestemmes, og med samme retning som den ønskede flytningskomposant. Tilsvarende findes influensfunktioner for drejninger ved at påsætte enhedsmomenter. Influenslinier for flytninger/drejninger bestemmes principielt på samme måde for både statisk bestemte og ubestemte konstruktioner. Beregningsomfanget svarer til at beregne et enkelt lasttilfælde.

Snitkræfter i et konstruktionselement kan generelt skrives som en funktion af flytninger/drejninger i elementets endepunkter plus et eventuelt bidrag fra last på elementet. Ud fra dette kan man vise at beregning af influensfunktioner for snitkræfter kan bestemmes ud fra beregning af et enkelt lasttilfælde plus et lokalt bidrag for det element snitkraften bestemmes i. Hermed kan såvel statisk bestemte som statisk ubestemte konstruktioner beregnes med samme metode. For statisk ubestemte konstruktioner er beregningsomfanget reduceret kraftigt i forhold til den traditionelle fremgangsmåde.

Til beregning af influensfunktioner for henholdsvis moment, forskydningskraft og normalkraft opstilles 3 elementartilfælde. Princippet er at indføre en diskontinuitet i henholdsvis vinkel, tværflytning og aksialflytning. Diskontinuiteterne kræver kræfter i bjælkernes endepunkter, og formler for disse opstilles. Knudekræfterne skal anvendes til beregning af konstruktionens deformationer, og det kan enten ske efter deformationsmetoden eller elementmetoden.

Til sidst gennemgås den sædvanlige fremgangsmåde til bestemmelse af influenslinier for statisk bestemte konstruktioner. Princippet er, at tildele bjælken en diskontinuitet svarende til den pågældende snitkraft, og da konstruktionen er statisk bestemt findes flytningerne direkte. Metoden kan opfattes som en delmængde af den mere generelle fremgangsmåde.

Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug ved undervisningen i statik. Formålet med notatet er at bibringe de studerende en grundlæggende forståelse af influenslinier for flytninger, snitkræfter og reaktioner.

Tidligere fremstillinger har særskilt behandlet statisk bestemte og statiske ubestemte konstruktioner, men her er valgt en mere generel fremgangsmåde.

Det vises at beregning af en influensfunktion svarer til beregning af et enkelt lasttilfælde, og der anvises hvorledes man med et sædvanligt rammeprogram umiddelbart kan bestemme influensfunktioner.

Esbjerg, September 2002

Lars Damkilde

Indhold

1. Definition af influenslinier

Ved dimensionering af et konstruktionselement i en bærende konstruktion skal man bestemme den størst tænkelig påvirkning på elementet. Belastningen består af et antal grundbelastninger som skal kombineres sammen efter et bestemt system, og den enkelte last kan i nogle tilfælde virke på enten hele konstruktionen eller dele deraf. Grundprincippet er, at man ikke må medtage last, der virker til gunst.

Som hjælpemiddel kan man anvende *influenslinier* eller influensfunktioner. Ved en influenslinie forstås en funktion, $\delta^i(s)$, som giver størrelsen af virkningen (influensen) i et punkt, i, for en enhedspåvirkning i punktet med koordinaten s. Virkningen kan være et bøjningsmoment midt på en bjælke, og påvirkningen kunne stamme fra en last et vilkårligt sted på bjælken.

Med influensfunktionen kan man finde virkningen, V, ved at integrere belastningen sammen med influensfunktionen, som vist i nedenstående formel.

$$V = \int_{\text{konstruktion}} p(s) \cdot \delta^i(s) ds \tag{1}$$

Integrationen skal udstrækkes over hele konstruktionen, og der er anvendt en koordinat s til at beskrive det. I en elementmetodeformulering beskrives influensfunktionen lettest ved, at hvert element beskrives med sin egen influensfunktion, og hermed undgås koordinaten s, der i mere komplekse rammekonstruktioner er kunstig.

Eksempel

Der betragtes en kontinuert bjælke over 2 fag som vist i Figur 1. I figuren er også vist influenslinien for momentet midt på det yderste venstre fag.

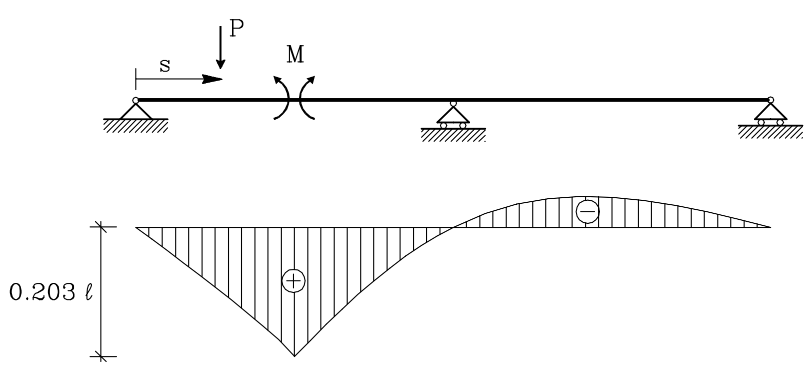

Fig. 1: Influenslinie for moment i midten (bjælke over 2 fag).

Som ventet er influensfunktionen positiv i venstre fag, og det vil sige at hvis man belaster med en nedadrettet kraft i venstre fag får man et positivt bidrag til momentet. Influensfunktionen er størst midt på fagene, hvilket ikke er overraskende, da en kraft midt på faget giver et relativt større bøjningsmomentet end en kraft tæt på en understøtning.

Influensværdien midt på faget giver, at en enkeltkraft P på midten giver et moment på 0.203 Pl, hvilket kan verificeres med en deformationsmetodeberegning. Influenslinien på det højre fag er negativ, og det betyder, at en nedadrettet kraft på dette fag giver et negativt bidrag til momentet.

I det farligste lasttilfælde skal nyttelaste placeres på den værst tænkelige måde. Influenslinien giver direkte, at der kun skal placere last på det venstre fag. I dette simple tilfælde er det ikke særligt overraskende, men for mere komplekse konstruktioner er det meget vanskeligt at bestemme den farligste lastplacering uden kendskab til influensfunktionen.

Eksempel slut

Formålet med notatet er at opstille en beregningsmetode for influenslinier gældende for både statisk bestemte og statisk ubestemte konstruktioner.

Forudsætningen for metoden er en lineærelastisk konstruktion, og flytningerne vil blive regnet små. Det betyder, at superpositionsprincippet kan benyttes.

Influenslinierne kan konstrueres ved at gennemregne konstruktionen for et stort antal forskellige placeringer af enhedsbelastningen. Influenslinierne kan derefter konstrueres ved interpolation udfra de beregnede lastplaceringer. Beregningsomfanget for en sådan metode vil dog hurtigt stige voldsomt, og konstruktionen skal ikke være mange gange statisk ubestemt for at det bliver meget omfattende. Samtidig skal man huske på, at influenslinier i princippet skal konstrueres for alle tværsnit.

I det følgende vil der blive opstillet en beregningsmetode baseret på Betti's sætning, som kan udregne influensfunktionen med et beregningsomfang, som svarer til at udregne et enkelt lasttilfælde. D.v.s. at metoden i forhold til den skitserede er ca n gange hurtigere, hvor n står for antallet af bjælkeelementer i konstruktionen.

Beregningsmetoden er baseret på en elementmetodeformulering, men resultaterne kan bruges mere generelt. Det grundlæggende princip går på, at ækvivalere den søgte påvirkning med en last, som konstruktionen beregnes for. Om man benytter et elementmetodebaseret rammeprogram til at løse dette, eller en håndberegningsmetode baseret på deformations- eller kraftmetoden er for så vidt underordnet.

Traditionelt behandles influenslinier ved først at behandle statisk bestemte konstruktioner, som kan løses ved rent geometriske betragtninger. Herefter behandles statisk ubestemte konstruktioner, men beregningsomfanget bliver meget stort, og derfor er konstruktionerne normalt kun en enkelt gang statisk ubestemte, se f.eks. [1], [2].

Udgangspunktet i den valgte fremstilling er, at influensberegninger skal kunne bruges også for mange gange statiske ubestemte konstruktioner, og at beregningsmetoden skal kunne automatiseres d.v.s. programmeres. Beregningerne i notatet er udført med et plant rammeprogram, FRAME2D, se [5].

2. Influenslinier for flytning/reaktion

Grundlaget for influenslinier er Betti's sætning, der siger, se f.eks. [3]:

> **Forudsætninger**
>
> Konstruktionsmaterialet er lineærelastisk, og flytningerne kan regnes små.
>
> Der betragtes 2 ligevægtstilstande, og tilstanden i hver situation er beskrevet ved belastningen, spændingerne, flytningerne og de dertil hørende tøjninger.
>
> **Betti's sætning**
>
> Der gælder, at det arbejde det første systems belastning udfører ved at virke gennem det andet systems flytninger, er det samme som det, det andet udfører ved at virke gennem flytningerne fra det første.

Et specialtilfælde af Betti's sætning er Maxwell's sætning, som siger, at flytningen i et punkt A forårsaget af en belastning P i punkt B, kan findes som flytningen i B fra en belastning P i A.

Maxwell's sætning er det direkte operationelle grundlag for influenslinier for flytninger. Som eksempel betragtes en bjælke over 3 lige store fag, hvis tværsnit er ens i hele bjælken. Influenslinien for den nedadrettede tværflytning midt på det yderste fag findes direkte ved at belaste med en nedadrettet enhedskraft 1 i det samme punkt. I Figur 2 er influenslinien optegnet, og man kan se, at nedadrettet belastning i de yderste fag giver flytningsbidrag i samme retning, d.v.s. positiv influenslinier medens nedadrettet belastning i midterfaget har en negativ influensværdi.

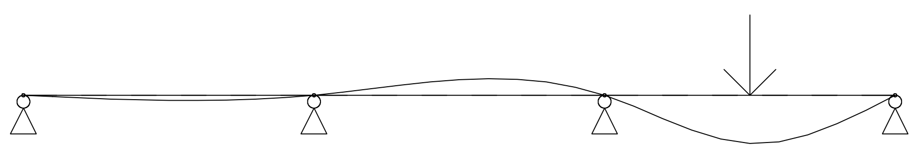

Fig. 2: Influenslinie for flytning.

I ovennævnte eksempel fik bjælken kun flytninger vinkelret på bjælken, men i det generelle tilfælde vil elementerne i en rammekonstruktion både få flytninger vinkelret på bjælkeaksen og aksiale flytninger. Influensfunktionen i et punkt s indeholder altså 2 værdier, $\delta_w(s)$ og $\delta_u(s)$. Når den samlede virkning af en kraft P i punktet s skal bestemmes findes det som det skalære produkt mellem kraften og influensfunktionen opfattet som vektorer.

Influenslinien for en momentbelastning svarer til drejningen, $\theta = -w_{,x}$. Momentbelastninger er ikke en særlig typisk belastning, og den vil derfor ikke blive omtalt i det følgende. Metoderne i det følgende kan dog uden videre generaliseres ved at medtage drejningsbidraget.

Influenslinier for drejninger findes ved at påsætte enhedsmomenter, og beregningerne kan enten foretages med håndberegningsmetoder eller edb-programmer. Der skelnes ikke mellem statisk bestemte og statisk ubestemte konstruktioner, men beregningsomfanget ved håndberegningsmetoder vil selvfølgelig afhænge af dette.

Influenslinier for reaktioner findes ved at give systemet en tvangsflytning af størrelsen 1 modsat rettet reaktionen, R, og udfra den tvungne deformation bestemmes flytningstilstanden i resten af konstruktionen. For indspændingsmomenter anvendes foreskrevne rotationer.

Flytningsfeltet fra den foreskrevne flytning udgør influenslinien, og beviset følger direkte udfra Betti's sætning. System 1 opfattes som det med reaktionen og den lodret nedadrettede enhedskraft virkende i punktet med koordinaten s. System 2 har en tvungen deformation på -1 ved reaktionen. I system 2 er der kun kræfter i understøtningerne, og derfor udføres der ikke arbejde med system 1's flytninger. Det ydre arbejde i system 1 gennem flytningerne fra system 2, må derfor være 0. Arbejdet i system 1 kan også skrives som:

$$1 \cdot w(s) + R \cdot (-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = w \tag{2}$$

hvor $w(s)$ er den nedadrettede tværflytning i punktet med koordinaten s. Hermed ses, at influenslinien for reaktionskraften bliver flytningsfeltet fra system 2.

Enheden for influenskurven, $w(s)$, bliver dimensionsløs. Størrelsen af reaktionen for en given påvirkning P i punktet med influensværdien $w(s)$ er $R = P \cdot w(s)$

I ovenstående udledning er implicit forudsat, at enhedskraften har samme retning som tværflytningen. Svarende til generaliseringerne under influenslinier for flytninger, kan man opfatte enhedskraften som 2 enhedskræfter rettet henholdsvis vinkelret og parallelt med bjælkeaksen. Arbejdet fra enhedskræfterne kommer da til at svare til summen af tvær- og aksialflytning. Virkningen af en kraft P i koordinaten s findes som det skalære produkt mellem kraften og influensfunktionen opfattet som vektorer.

Som eksempel er valgt det samme som ved influenslinien for flytninger, og der bestemmes influenslinien for reaktionen i den lodrette understøtning mellem fag 2 og 3. I Figur 3 er influenslinien optegnet, og man kan se, at belastning i de 2 nærmeste fag giver positive bidrag medens belastning i det fag længst væk har en negativ influensværdi.

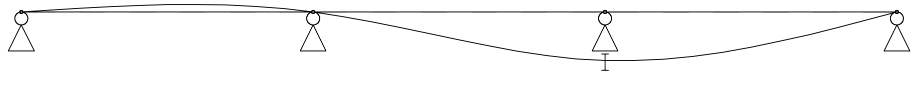

Fig. 3: Influenslinie for lodret reaktion.

De fleste ramme-programmer kan behandle foreskrevne flytninger. Fremgangsmåden ved beregning af foreskrevne flytninger kan f.eks. findes i [4]. Alternativt kan influenslinier for reaktioner bestemmes udfra influenslinier for snitkræfter jvf næste kapitel, men det vil kræve lidt mere arbejde. I ovennævnte tilfælde kunne influenslinierne for forskydningskræfterne i de 2 nabofag bestemmes, og forskellen ville være udtryk for reaktionskraften.

3. Influenslinier for snitkræfter

Momenterne i en plan rammekonstruktion kan findes direkte udfra drejningen og tværflytningen i hver ende af det pågældende bjælkeelement. Hvis der er last direkte på elementet skal der yderligere lægges et bidrag til. Bidraget findes udfra løsningen af et standardtilfælde, hvor begge ender af bjælkeelementet opfattes indspændte.

Forskydningskræfterne bestemmes udfra de samme flytninger/drejninger som momentet, medens normalkraften alene bestemmes udfra de 2 aksiale flytninger.

Influenslinier for snitkræfter kan derfor konstrueres på basis af princippet for influenslinier for flytninger, idet influenslinierne for de 4 flytninger/drejninger kombineres passende sammen. Regnearbejdet vil maksimalt svare til beregningen af 4 lasttilfælde, og dette er noget mindre end angivet i [1] og [2].

I det følgende opstilles en metode til bestemmelse af en influenslinie for en given snitkraft, som kun kræver beregning af et lasttilfælde. Princippet følger bestemmelsen af reaktionskraften, som vist i kapitel 2. Ideen er at finde et flytningsfelt, som har en diskontinuitet på 1 i det punkt, hvor snitkraften ønskes bestemt. For momenter er det en drejningsdiskontinuitet, medens forskydningskræfter og normalkræfter kræver diskontinuiteter i henholdsvis tværretning og aksial retning. Det diskontinuerte flytningsfelt bestemmes således, at den eneste ydre last består af modsatrettede kræfter/momenter i diskontinuitetspunktet.

Ved anvendelse af Betti's sætning kan man bestemme influenslinien for snitkraftkomposanten. Systemet med enhedsbelastningen og den ønskede snitkraft, M, betegnes 1, og systemet med det diskontinuerte flytningsfelt 2. Arbejdet fra kræfterne fra system 2 sammen med flytningerne i system 1 er 0, da flytningsfeltet er kontinuert, og derfor udfører de modsatrettede kræfter i system 2 intet arbejde. Arbejdet fra kræfterne i system 1 med flytningerne fra system 2, må derfor være 0.

Den indre snitkraft opfattes holdt i ligevægt af et ydre moment/kraftpar. Det ydre arbejde fra kræfterne i system 1 bliver da:

$$1 \cdot w(s) + (-M) \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M = w(s) \tag{3}$$

hvor w(s) er tværflytningen i det diskontinuerte system 2. Flytningsfeltet giver derfor influensfunktionen direkte.

Størrelsen af snitkraften for en given påvirkning P i punktet med influensværdien $w(s)$ er $M = P \cdot w(s)$ Enheden for influenskurven, $w(s)$, bliver dimensionsløs for forskydnings- og aksialkraft medens den har enheden længde for et moment.

I ovenstående udledning er implicit forudsat, at enhedskraften har samme retning som tværflytningen. Svarende til generaliseringerne i kapitel 2, kan man opfatte enhedskraften som 2 enhedskræfter rettet henholdsvis vinkelret og parallelt med bjælkeaksen. Arbejdet fra enhedskræfterne kommer da til at svare til summen af tvær- og aksialflytning. Virkningen af en kraft P i koordinaten s findes som det skalære produkt mellem kraften og influensfunktionen opfattet som vektorer.

I appendix A er gennemregnet 3 elementartilfælde, hvor der er indført diskontinuitet i henholdsvis drejning, tværflytning og aksialflytning. Diskontinuiteten kan placeres et vilkårligt sted på elementet. Diskontinuiteten betyder, at omgivelserne påvirkes af kræfter i elementets endepunkter. Bjælkeflytningerne i elementet er også bestemt for de 3 typer diskontinuiteter.

Beregningsmetoden består af følgende trin:

1. Indfør den ønskede diskontinuitet.
2. Bestem de pågældende knudekræfter, $\mathbf{r}$.
3. Belast systemet med $\mathbf{r}$, og bestem flytningsfeltet w i konstruktionen.
4. Bestem det lokale flytningsbidrag w_l i elementet med diskontinuitet.
5. Influensfunktionen bestemmes som $w + w_l$.

Ideen med trin 3 er, at bestemme et flytningsfelt med diskontinuitet, der kun kræver ydre kræfter i selve diskontinuiteten.

Metoden kan anvendes enten i forbindelse med en edb-baseret metode eller en håndberegningsmetode. Der kræves ingen særlige faciliteter i et rammeberegningsprogram, men det lokale flytningsbidrag skal adderes separat. Det er umiddelbart at indbygge influenslinier svarende til f.eks. fordelt last på et element. Metoden kan anvendes på både statisk bestemte og statisk ubestemte konstruktioner jævnfør kapitel 2.

Et alternativ til ovenstående metode består i at indføre et charnierer i det punkt, hvor f.eks. bøjningsmomentet ønskes bestemt. Det indre charnierer gives en gensidig vinkeldrejning på 1, og det resulterende flytningsfelt er influensfunktionen. Fordelen i forhold til ovenstående består i, at der ikke skal adderes et ekstra flytningsbidrag w_l, men der er til gengæld 2 væsentlige ulemper.

Den første vedrører generaliteten, og omhandler statisk bestemte konstruktioner. Indførelse af et indre charnierer vil betyde, at konstruktionen bliver bevægelig, og ligningssystemet kan derfor ikke løses. I statisk ubestemte konstruktioner kan problemet også opstå, hvis man f.eks. betragter en udkraget del af konstruktionen, og ønsker influensfunktionen for momentet.

Den anden og mere væsentlige ulempe vedrører beregningsomfanget, hvis man - som man ofte gør - ønsker influenslinier for flere forskellige snitkræfter. Den ovennævnte fremgangsmåde betyder, at der for hver ny placering af det indre charnierer skal ske en opbygning og faktorisering af stivhedsmatricen. I den anbefalede metode beregnes deformationerne på basis af det oprindelige systems stivhedsmatrix, og faktoriseringen skal kun foretages en gang. Beregningen af en influenslinie har da et omfang svarende til beregningen af et enkelt lasttilfælde, jvf. f.eks. [4].

Eksempel

Nedenfor er beregningsmetoden illustreret for en 2-etages rammekonstruktion, se Figur 4. Eksemplet er regnet med FRAME2D, [5].

Influenslinien for det positive moment i det nederste højre ben ønskes bestemt. Undersiden af benet er på ydersiden af konstruktionen.

Fig. 4: Vinkeldiskontinuitet.

Svarende til den generelle fremgangsmåde bestemmes knudekræfterne for en drejnings-diskontinuitet. I (9) er knudekræfterne angivet. Diskontinuiteten placeres ved startknuden svarende til $\eta = 0$.

Knudekræfterne i startknuden er unødvendige at udregne, idet belastningen går direkte i indspændingen. De 2 øvrige knudekræfter udregnes til:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(5) &= 6(1-2\eta)\frac{EI}{l^2} = 6\frac{EI}{l^2} \\ \mathbf{r}(6) &= -(2-6\eta)\frac{EI}{l} = -2\frac{EI}{l} \end{aligned} \tag{4}$$

Knudekræfterne skal drejes ind i det globale koordinatsystem. For momentet $\mathbf{r}(6)$, der altid regnes positivt med uret, er der ingen ændring, mens tværkraften $\mathbf{r}(5)$ kommer til at gå i x-aksens negative retning. Belastningen på rammekonstruktionen består af $\mathbf{r}$, og det betyder, at rammekonstruktionen skal beregnes for en vandret kraft i x-aksens negative retning, og et negativt moment.

I Figur 4 er flytningsfeltet optegnet, og der er også adderet det lokale bidrag. Den stiplede linie angiver flytningerne fra den ydre last alene.

I Figur 4 ses, at influensfunktionen kan have komposanter i både x- og y-retningen. Som forventet vil en nedadrettet kraft på den nederste bjælke have en negativ influens, mens der er positiv influens på den øverste. For vandret belastning er der positiv influens overalt, hvis kraften er rettet i x-aksens negative retning.

4. Farligste lastkombinationer

Lastnormen DS409 og DS410

Bærende konstruktioner dimensioneres i henhold til den danske lastnorm DS409 og DS410 udfra nogle normmæssigt fastlagte lasttilfælde som kombineres sammen i lastkombinationer. I lastkombinationerne vægtes de enkelte lasttilfælde med partialkoefficienter, der er udtryk for en sikkerhedsmæssig vurdering. Som eksempler på lasttilfælde kan nævnes egenvægt, sne, vind og nyttelast. Normen fastlægger størrelsen og udstrækningen af de enkelte belastninger.

Som eksempel betragtes en konstruktion udsat for egenvægt, sne og vind. Denne konstruktion skal i princippet undersøges for følgende lastkombinationer, jvf DS409 og 410, hvor tallene i tabellen angiver partialkoefficienten.

Lastkombination	Egenvægt	Sne	Vind
1	1.0	0.0	0.0
2	1.0	1.3	0.0
3	1.0	0.0	1.3
4	1.0	1.3	0.5
5	1.0	0.5	1.3

Udover disse kombinationer burde man strengt taget undersøge en række andre, som af hensyn til pladsen ikke er angivet. Lastnormen bestemmer nemlig, at hvis egenvægten virker til gunst skal partialkoefficienten kun være 0.85 i stedet for 1.0. Som eksempel kan nævnes opadrettet vindlast, hvor egenvægt hjælper med til at holde konstruktionen nede. For en mere kompliceret konstruktion kan noget egenvægt virke til gunst medens andet til ugunst, og så skal partialkoefficienten være forskellig i de forskellige dele. Snelast på udhæng skal tilsvarende heller ikke regnes med, hvis den virker til gunst.

I princippet skal enhver konstruktionsdel checkes for det farligste lasttilfælde, og det betyder at omfanget af beregninger kan blive meget stort, hvis man benytter en simpel strategi, hvor alle tværsnit undersøges for alle lastkombinationer. Problemstillingen kompliceres så yderligere af, at lasten i den enkelte kombination kan have forskellig partialkoefficient.

De enkelte konstruktionsdele dimensioneres typisk efter forskellige lastkombinationer, og man kan kun tale om en dimensionsgivende lastkombination for en konstruktionsdel ikke for en samlet konstruktion.

Ved manuelle beregningsmetoder vil dimensioneringen kun omfatte en meget beskeden del af de tænkelige kombinationer. Den trænede ingeniør vil udpege en række kritiske tværsnit, og for hvert tværsnit udvælge den eller de kritiske lastkombinationer. For simple konstruktioner vil den erfarne ingeniør kun sjældent fejle, og metoden er relativ hurtig. Problemet består dog i, at den kræver erfaring, og at den er umulig at inkorporere i et edb-program, idet selve udvælgelsen af kritiske tværsnit og kombinationer i høj grad baserer sig på indlevelse i konstruktionens virkemåde.

For mere komplekse konstruktioner er det dog ofte nødvendigt at gennemføre en mere systematisk eftervisning af konstruktionens bæreevne. Et væsentligt problem er ofte at finde den farligste lastopstilling. Som eksempel kan nævnes brokonstruktioner, som skal undersøges for en lastkombination der indeholder belastningen fra en blokvogn. Denne skal placeres på den mest kritiske måde, og denne vil være forskellig for forskellige tværsnit. Tilsvarende skal belastningen fra trafiklast bestemmes således at den valgte opstilling kun virker til ugunst for det pågældende konstruktionselement.

Beregning af farligste lastkombination og lastopstilling

Nedenfor vil lastnormens enkelte grundtilfælde blive behandlet under anvendelse af influenslinier, således at den farligste kombination vælges. Metodebeskrivelsen er valgt edb-orienteret, og i konkrete tilfælde kan nogle af operationerne udelades. Specielt er det ofte unødvendigt at medtage bidragene fra influensfunktionen i bjælkens retning.

Der betragtes en snitkraft som momentet eller normalkraften, og den dertil hørende influenskurve bestemmes efter metoden angivet i kapitel 3. Influensfunktionen opdeles i influensfunktioner for hvert element, og element i's influensfunktioner betegnes $\delta_w^i(s)$ og $\delta_u^i(s)$. Index w henviser til influensfunktionen vinkelret på bjælken og index u til den aksiale retning. s er en dimensionsløs koordinat gående fra 0 til 1.

Grundlasttilfældene kan deles op i følgende principielt forskellige typer:

- Egenvægt. Ikke kun af selve elementerne men også egenvægt af sekundære konstruktionsdele som ligger af på konstruktionen.
- Bundne belastninger, f.eks. vind. Belastningen vil enten virke helt med eller slet ikke.
- Frie belastninger, f.eks. nyttelast på etager.
- Lasttog, f.eks. trafiklast fra blokvogne på broer. Lasten består af dellaste med en fast given afstand.

Virkningen af en bestemt grundlast beregnes ved integration af grundlast og influensfunktionen. Integrationen kan enten foretages analytisk eller numerisk, og influensfunktionerne er 3'grads polynomier i s og lasten typisk en konstant eller lineær funktion i s. For koncentrerede påvirkninger integreres direkte ved at gange belastningen med influensfunktionen i det pågældende punkt.

Egenvægt

Egenvægt skal kun regnes med som 85 %, når den virker til gunst for konstruktionen, d.v.s. nedsætter den pågældende snitkraft.

Integrationen foretages ved at gennemløbe alle elementer, hvor der virker egenvægt. Egenvægten projiceres ind på elementets lokale akser, og integrationen kan herefter foretages. Hvis retningen af egenvægt og influensfunktion ikke er den samme, skal denne del af bidraget ganges med 0.85.

Egenvægt korrigeret med 0.85 på de dele, der virker til gunst, skal altid medtages.

Bundne belastninger

Dette er belastninger, som i henhold til deres fysiske natur, kun kan eksistere som et hele. Vindlast er et eksempel, selvom der er visse undtagelser i lastnormen. Disse undtagelser behandles ikke her, da det ikke vil tilføje noget principielt nyt.

Integrationen foretages svarende til egenvægt, idet der dog ikke foretages nogen modifikation når retning af last og influensfunktion er forskellig.

Den bundne belastning skal kun medtages, hvis det samlede influensbidrag er positivt.

Frie belastninger

Dette er belastninger, som ikke har nogen indbyrdes korrelation. Som eksempel kan nævnes nyttelast på etageadskillelser.

Integrationen foretages svarende til egenvægt, idet faktoren 0.85 dog sættes til 0. Last, der virker til gunst, skal altså overhovedet ikke medtages.

Den frie belastning skal kun medtages, hvis det samlede influensbidrag er positivt.

Lasttog

Dette er belastninger som typisk forekommer fra trafiklast. En bro skal dimensioneres for en blokvognsbelastning, der består af nogle koncentrerede belastninger med en indbyrdes fast afstand.

Specialtilfældet med en enkeltkraft, der skal placeres på den farligste måde, løses let, ved at finde maksimumsværdien for influensfunktionen med samme retning som kraften.

Det generelle tilfælde er ganske omfattende at beskrive, og derfor indskrænkes problemet til en vandret brobane med længde l opdelt i et antal elementer og understøttet i forskellige punkter. Lasttoget består af 2 enkeltkræfter med en indbyrdes afstand, d. Antagelserne giver, at det kun er interessant at betragte influensfunktionen på tværs af elementerne. Influensfunktionen for den valgte snitkraftkomposant betegnes $\delta(s)$, hvor s løber fra 0 til l. For lasttoget konstrueres den samlede influensfunktion som $\delta^\star = \delta(s) + \delta(s-d)$, hvor s her går fra 0 til $l + d$. I beregningen af influensfunktionerne sættes $\delta(s) = 0$, når parameteren s er uden for intervallet 0 til l. Den farligste placering af lasttoget findes ved at bestemme maksimumspunktet for $\delta^\star$.

Den beskrevne metode kan generaliseres, men det kræver en præcis definition af lasttoget, og hvorledes det kører over konstruktionen.

Bidraget fra lasttoget skal kun medtages, hvis det samlede influensbidrag er positivt.

Lastkombinationer

Lastnormen foreskriver, at grundlastene kombineres sammen på forskellig måde. Egenvægtsbelastning skal altid medregnes korrigeret med 0.85 for de dele, der virker til gunst.

Herudover opbygges lastkombinationer ved at gennemløbe samtlige uafhængige grundlasttilfælde og tildele dem partialkoefficienten 1.3. De øvrige laste medtages, hvis de virker til ugunst, og partialkoefficienten er Ψ. Denne reducerede partialkoefficient udtrykker, at sandsynligheden for samtidige ekstreme værdier af 2 uafhængige hændelser er meget lille. Koefficienten Ψ ligger i intervallet 0.5 til 1.0.

Den farligste lastkombination kan enkelt findes ved at udregne $(1.3 - \Psi) \times$ influensværdien for hvert grundlasttilfælde. Der vælges den med det største bidrag, og de øvrige grundlasttilfælde medtages med faktoren Ψ, såfremt de giver et positivt influensbidrag.

5. Influenslinier for statisk bestemte konstruktioner

For statisk bestemte konstruktioner kan influenslinier konstrueres direkte udfra geometriske overvejelser, og influensfunktionerne er dermed uafhængige af tværsnits- og materialedata. Dette er en konsekvens af, at snitkræfterne i en statisk bestemt konstruktion som bekendt er uafhængig af stivhedsforholdene.

Princippet i bestemmelsen af influenslinier er uændret, og består i at tildele konstruktionen geometriske diskontinuiteter i de punkter hvor virkningen ønskes bestemt. For et moment skal der indføres et knæk i bjælken af størrelse 1, d.v.s en drejningsdiskontinuitet, og bjælken skal være sammenhængende d.v.s. ingen flytningsdiskontinuitet. For forskydningskraften indføres en flytningsdiskontinuitet af størrelsen 1, mens drejningen er kontinuert.

Nedenfor i Figur 5 er princippet illustreret for en simpelt understøttet bjælke med udkragning. Influenslinien for momentet på midten findes ved at indføre en drejningsdiskontinuitet på 1 i midtpunktet, og bjælkens resulterende flytninger findes let, idet de enkelte bjælkedele betragtes som stive dele.

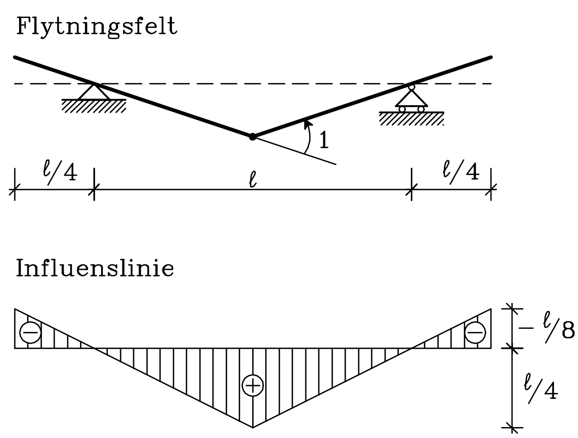

Fig. 5: Influenslinie for moment.

Der betragtes et lasttilfælde med en jævnt fordelt nedadrettet belastning p, som kan variere frit. Udfra influenslinien ses, at det største moment i bjælkens midtpunkt findes ved at placere lasten mellem understøtningerne. Størrelsen af momentet findes ved at integrere influenskurven sammen med p. Resultatet bliver $p \times 2 \times 1/2 \cdot l/2 \cdot l/4 = 1/8\ pl^2$, som er det velkendte resultat for en simpel understøttet bjælke.

Influenslinien for forskydningskraften til højre for understøtningen findes ved at give bjælken en flytningsdiskontinuitet af størrelse 1. Drejningen skal være kontinuert, og på Figur 6 ses, at de 2 adskilte bjælkedele er parallelle. De enkelte dele opfattes igen som stive dele, og flytningsfeltet konstrueres ud fra dette. Geometrisk er det nogle gange lidt mere komplekst med flytningsdiskontinuiteter specielt med henblik på at give de 2 tilstødende bjælkedele den samme drejning.

Den farligste placering af last fås ved at placere last mellem understøtningerne og på det venstre udhæng. Størrelsen af forskydningskraften bliver $V = p \cdot 1/2(1/4 \cdot l/4 + 1 \cdot l) =$

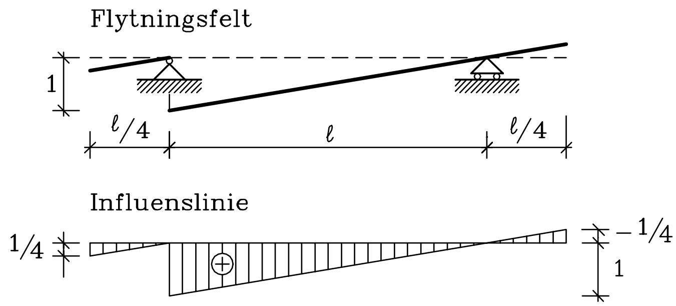

Fig. 6: Influenslinie for forskydningskraft.

17/32 *pl.*

Den generelle metode der er anvist i kapitel 3 kan også anvendes, og deformationerne fra de ækvivalente knudekræfter kan nemt findes ved håndregning, idet konstruktionen er statisk bestemt. Tilsyneladende kommer der en afhængighed af konstruktionens stivhedsforhold, idet de ækvivalente knudekræfter afhænger af EI. Deformationer vil imidlertid være omvendt proportionale med EI, og derfor bliver influensfunktionen uafhængig af stivhedsforholdene.

Appendiks A

Elementartilfælde for moment, forskydningskraft og normalkraft

Vi betragter en bjælke med konstant EI, og i punktet A ønskes indført en diskontinuitet i enten tværudbøjningen eller vinkeldrejningen. Afstanden fra bjælkens startpunkt, 1, betegnes $\eta\ell$, hvor ℓ er bjælkens længde. I Figur 7 er geometrien beskrevet.

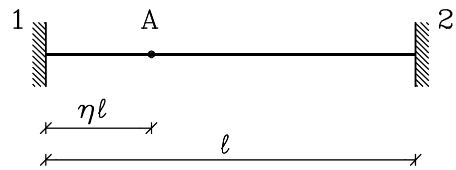

Fig. 7: Bjælkegeometri.

Vi opdeler bjælken i 2 bjælkedele, som i første omgang betragtes hver for sig, som vist i figur 8. Belastningen på bjælken svarer til snitkræfterne.

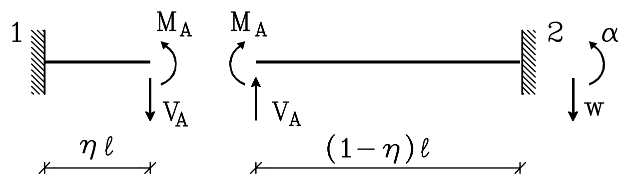

Fig. 8: Uafhængige bjælkedele.

De 2 bjælkeenders tværudbøjning, w_A^1 og w_A^2, og vinkeldrejninger, α_A^1 og α_A^2, bestemmes let ud fra elementær statik. Fortegnsregningen er angivet på figur 8.

$$
\begin{aligned}
w_A^1 &= -\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI}(\eta\ell)^2 + \frac{1}{3}\frac{V_A}{EI}(\eta\ell)^3 \\
w_A^2 &= -\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI}((1-\eta)\ell)^2 - \frac{1}{3}\frac{V_A}{EI}((1-\eta)\ell)^3 \\
\alpha_A^1 &= \frac{M_A}{EI}\eta\ell - \frac{1}{2}\frac{V_A}{EI}(\eta\ell)^2 \\
\alpha_A^2 &= -\frac{M_A}{EI}(1-\eta)\ell - \frac{1}{2}\frac{V_A}{EI}((1-\eta)\ell)^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Til bestemmelse af influenslinier for henholdsvis moment og forskydningskraft indføres en diskontinuitet i enten vinkeldrejningen eller tværudbøjningen. I det følgende udregnes hvert tilfælde for sig.

Moment - diskontinuitet i drejning

De geometriske betingelser er:

$$\begin{aligned} w_A^1 &= w_A^2 \\ \alpha_A^2 - \alpha_A^1 &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Ud fra de geometriske betingelser kan man via (5) bestemme snitkræfterne i A. Løsningen er principielt enkel, men medfører noget regnearbejde, som ikke medtages her. Ved udregning findes:

$$\begin{aligned} M_A &= -4\frac{EI}{\ell}(\eta^3 + (1-\eta)^3) \\ V_A &= 6\frac{EI}{\ell^2}(1-2\eta) \end{aligned} \tag{7}$$

Snitkræfterne M_A og V_A er i figur 9 vist som funktion af η. For grænsetilfældet $\eta = 0$ eller 1 fås umiddelbart det kendte elementartilfælde med en drejning af understøtningen. For $\eta = \frac{1}{2}$ fås at $V_A = 0$, og symmetribetingelsen er opfyldt.

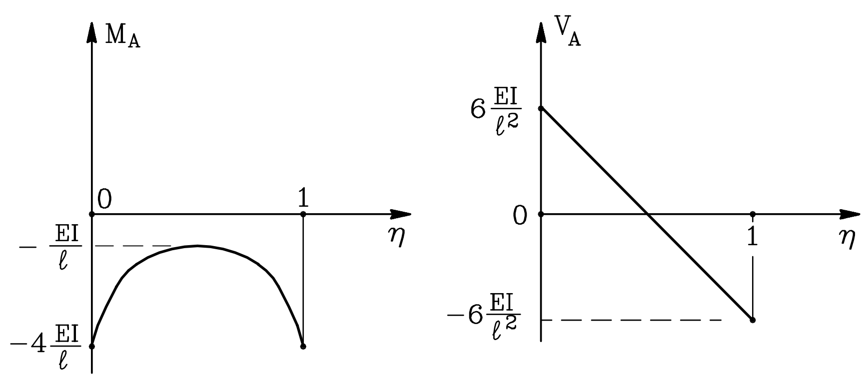

Fig. 9: Snitkræfter som funktion af η.

Udfra snitkræfterne i punkt A kan man via ligevægtsligningerne umiddelbart bestemme reaktionskræfterne i punkt 1 og 2. Ved udregning findes

$$\begin{aligned} M_1 &= (-4+6\eta)\,\frac{EI}{\ell} \\ M_2 &= (2-6\eta)\,\frac{EI}{\ell} \\ V_1 &= V_2 = 6(1-2\eta)\,\frac{EI}{\ell^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Fortegnsregningen på reaktionerne fremgår af figur 10.

De konsistente eller ækvivalente knudekræfter kan tolkes som de kræfter omgivelserne bliver påvirket med og altså derfor modsat rettet af reaktionskræfterne.

De ækvivalente eller konsistente knudekræfter for belastningstilfældet med diskontinuitet i vinkeldrejningen bliver

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(2) = \quad & -V_1 && = -6(1-2\eta)\,\frac{EI}{\ell^2} \\
\mathbf{r}(3) = \quad & M_1 && = (-4+6\eta)\,\frac{EI}{\ell} \\
\mathbf{r}(5) = \quad & V_2 && = 6(1-2\eta)\,\frac{EI}{\ell^2} \\
\mathbf{r}(6) = \quad & -M_2 && = -(2-6\eta)\,\frac{EI}{\ell}
\end{aligned} \tag{9}
$$

hvor de ækvivalente knudekræfter er samlet i en vektor, hvor der er reserveret plads til kræfter i bjælkeaksens retning, jvf. [4]. Fortegnsregningen for $\mathbf{r}$ er med henblik på en elementmetodeformulering ens i begge knuder.

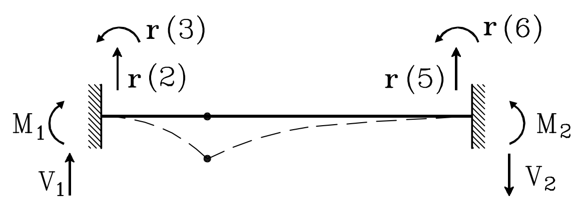

Fig. 10: Konsistente eller ækvivalente knudekræfter.

Ved beregning af influenslinier er det uinteressant at bestemme snitkræfterne i elementet, men derimod er flytningerne langs elementet vigtige. Svarende til (5) kan tværflytningens variation langs bjælkeaksen opskrives. Der indføres en dimensionsløs afstand, s, regnet fra knude 1, og det bemærkes, at formeludtrykket er forskelligt for $s \leq \eta$ og $s \geq \eta$ pga. vinkeldiskontinuiteten. For momentbelastninger ville vinkeldrejningen langs bjælken være interessant, men det udelades her, da det ikke har nogen særlig praktisk betydning. Ved udregning findes

For $s \leq \eta$

$$
\begin{aligned}
w(s) \quad &= \quad -\frac{1}{2}M_A\,\frac{(\eta\ell)^2}{EI}\,(\frac{s}{\eta})^2 + \frac{1}{6}\,V_A\,\frac{(\eta\ell)^3}{EI}\,(3(\frac{s}{\eta})^2 - (\frac{s}{\eta})^3) \\
&= \quad 2(\eta^3 + (1-\eta)^3)\,\ell s^2 + (1-2\eta)\,\ell(3s^2\eta - s^3)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Udtrykket for $s \geq \eta$ fås ved i (10) at ombytte η med $1-\eta$, ændre fortegnet på leddet med V_A samt at erstatte s med $1-s$.

For $s \geq \eta$

$$\begin{aligned} w(s) &= 2(\eta^3 + (1-\eta)^3)\ \ell(1-s)^2 - \\ & \quad (1-2\eta)\ \ell(3(1-s)^2(1-\eta) - (1-s)^3) \end{aligned} \tag{11}$$

For given værdi af η ses, at flytningen som forventet varierer som et 3. grads polynomium langs bjælkeaksen. På figur 10 er udbøjningsformen for en vinkeldiskontinuitet skitseret.
Med formlerne (9), (10) og (11) er etableret grundlaget for at bestemme influenslinier for bøjningsmomenter.

Forskydningskraft - diskontinuitet i flytning

De geometriske betingelser er

$$\begin{aligned} w_A^2 - w_A^1 &= -1 \\ \alpha_A^1 &= \alpha_A^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Analogt med fremgangsmåden ved bestemmelse af vinkeldiskontinuitet findes

$$\begin{aligned} M_A &= 6\frac{EI}{\ell^2}(1-2\eta) \\ V_A &= -12\frac{EI}{\ell^3} \end{aligned} \tag{13}$$

For $\eta = 0$ eller $\eta = 1$ genkendes elementartilfældet med en flytning af understøtningen på 1.
Ud fra snitkræfterne i punkt A findes umiddelbart reaktionskræfterne i punkt 1 og 2, og herefter kan de ækvivalente knudekræfter opskrives svarende til (9). Fortegnsregningen er som angivet i figur 10.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(2) &= 12\ \frac{EI}{\ell^3} \\ \mathbf{r}(3) &= 6\ \frac{EI}{\ell^2} \\ \mathbf{r}(5) &= -12\ \frac{EI}{\ell^3} \\ \mathbf{r}(6) &= 6\ \frac{EI}{\ell} \end{aligned} \tag{14}$$

Analogt med tidligere opstilles udtryk for tværudbøjningen, $w(s)$.

For $s \leq \eta$

$$w(s) = 3s^2 - 2s^3 \tag{15}$$

Som før findes udtrykket for $s > \eta$ ved passende ombytning.
For $s > \eta$

$$w(s) = -1 + 3s^2 - 2s^3 \tag{16}$$

Der er ikke længere kontinuitet i $w(s)$ for $s = \eta$, og forskellen er -1 svarende til den geometriske betingelse i (12). På figur 11 er skitseret udbøjningsformen en flytningsdiskontinuitet.

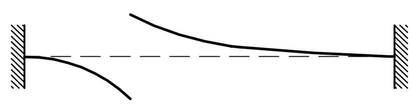

Fig. 11: Flytningsfelt for flytningsdiskontinuitet.

Med formlerne (14), (15) og (16) er etableret grundlaget for at bestemme influenslinier for forskydningskræfter.

Normalkraft - diskontinuitet i aksialflytning

Vi forudsætter, at belastning på bjælkeelementet kun består af tværlast, og at normalkraften derfor er konstant i elementet. Flytningsdiskontinuiteten kan lægges ind et vilkårligt sted, og de ækvivalente knudekræfter udregnes nemt til

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(1) &= -\frac{EA}{\ell} \\ \mathbf{r}(4) &= \frac{EA}{\ell} \end{aligned} \tag{17}$$

hvor A er tværsnitsarealet.

Retningen fremgår af figur 12.

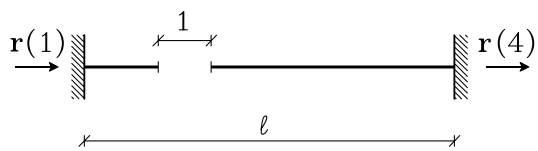

Fig. 12: Aksial flytningsdiskontinuitet.

Tværudbøjninger er identisk 0, og da der ikke er aksiallast langs elementet, er flytningsvariationen langs elementet uinteressant.

For rumlige bjælkeelementer findes influenslinier for vridningsmoment ved at indføre en diskontinuitet for vridningsvinklen. Forudsættes endvidere at der er konstant vridningsmoment i det enkelte bjælkeelement, bestemmes de ækvivalente knudekræfter analogt med normalkrafttilfældet, idet EA erstattes med GI_v. Her betegner G forskydningsmodulen, og I_v vridningsinertimomentet.

Litteratur

[1] Nielsen, M.P. og Pilegaard Hansen, L. *Plane statisk ubestemte konstruktioner*, RM 5.1, Danmarks Ingeniørakademi, Aalborg, 1972.

[2] Smith, J.C. *Structural Analysis*, Harper & Row, Publishers, 1988.

[3] Askegaard, V. (red:) *Introduktion til matematisk Elasticitetsteori*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, F 136, 1992.

[4] Damkilde, L. *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner.*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, F 118, 1990.

[5] Damkilde, L. FRAME2D vrs. 1.0, User documentation, 1992.