

# Introduktion til dynamik

Lars Damkilde

Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer  
Danmarks Tekniske Universitet  
DK-2800 Lyngby

Marts 1998

## Resumé

Forelæsningsnotatet giver en grundlæggende introduktion til dynamisk opførsel og et indblik i forskellige dynamiske analysetyper. Indledningsvis behandles systemer med en frihedsgrad, og de grundlæggende begreber som egensvingninger og tvungne svingninger med resonans beskrives. Dæmpning behandles både i forbindelse med egensvingninger og tvungne svingninger. Endelig vises transient belastning ved et eksempel. Teorien for bjælkesvingninger opstilles, og der gives nogle enkelte analytiske løsninger. Egensvingningsanalysen opstilles som et ikke-lineært egenværdiproblem. En elementmetodeformulering, der resulterer i et lineært egenværdiproblem, vises at være det første led i en rækkeudvikling af den eksakte formuleringen, og betydningen af elementinddelingen illustreres. Indflydelse af normalkræfter på egensvingningsanalysen vises. En generel elementmetodeformulering for systemer med  $n$  frihedsgrader opstilles. Udover egensvingningsanalysen beskrives også en egentlig tidsintegration både med eksplicite og implicite metoder. Principperne i modalanalyse gennemgås herunder behandlingen af dæmpning.

## Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset 59422, Edb-metoder for rammekonstruktioner. Formålet er at give en kort introduktion til den bagvedliggende teori samt at vise nogle kendte klassiske løsninger og eksempler på anvendelser. Det er håbet, at denne baggrund skulle gøre det lettere at sætte sig ind i anvendelse af FEM-programmer både i forbindelse med rammekonstruktioner og andre konstruktionstyper.

Lyngby, Marts 1998

Lars Damkilde

# Indhold

<b>Grundlæggende Dynamik</b>	<b>1</b>
Systemer med 1 frihedsgrad . . . . .	1
Egensvingninger . . . . .	2
Dæmpede egensvingninger . . . . .	3
Tvungne, udæmpede svingninger . . . . .	4
Tvungne, dæmpede svingninger . . . . .	5
Transient belastning . . . . .	6
<b>Bjælkesvingninger</b>	<b>10</b>
Eksempel: Simpelt understøttet søjle . . . . .	11
Eksempel: Udkraget bjælke . . . . .	12
Svingningsanalyse af rammekonstruktioner . . . . .	13
Eksempel: Simpelt understøttet bjælke . . . . .	16
Eksempel: Indspændt bjælke . . . . .	18
Indflydelse fra normal kræfter . . . . .	18
<b>Generel elementmetodeformulering</b>	<b>20</b>
Egensvingninger . . . . .	20
Tidsintegration . . . . .	21
EksPLICIT metode . . . . .	21
Implicit metode . . . . .	23
Modal analyse . . . . .	24
<b>Litteratur</b>	<b>27</b>

## Grundlæggende Dynamik

Ved en dynamisk analyse af en konstruktion får konstruktionens masse afgørende betydning, idet der tages hensyn til accelerationskræfterne, dvs. de kræfter der giver konstruktionen accelerationer.

En dynamisk analyse er relevant, hvor påvirkningerne fra last ændrer sig så hurtigt i tiden, at betydningen af accelerationen af konstruktionen får indflydelse på spændingsniveauet eller størrelsen af flytningerne. Som eksempler på dynamisk last kan nævnes bølge- og vindlast samt påvirkning fra jordskælv. Den første type belastning er cyklisk med en given frekvens, f.eks. antallet af bølgetoppe per tidsenhed. Den anden type belastning er kortvarig og benævnes en transient belastning. En mere omfattende beskrivelse af dynamiske belastninger med særligt vægt på jordskælv kan findes i (Clough and Penzien 1975).

Selvom en konstruktion kun udsættes for statisk belastning kan en undersøgelse af konstruktionens egenfrekvenser godt være nyttig. Hvis konstruktionen er meget fleksibel for visse belastninger, afsløres dette ikke nødvendigvis i en statisk analyse, men derimod i en egensvingningsanalyse. Konstruktionens egensvingninger kan også have betydning for komfort, f.eks. i forbindelse med gangbroer, hvor en meget fleksibel konstruktion virker usikker, selvom styrken er tilstrækkelig.

### Systemer med 1 frihedsgrad

I dette afsnit vises nogle principielle forhold for dynamisk opførsel af et system med 1 frihedsgrad, som vist i figur 1. En mere omfattende beskrivelse med mere vægt på analytiske løsningsmetoder kan f.eks. findes i (Meirovitch 1986).

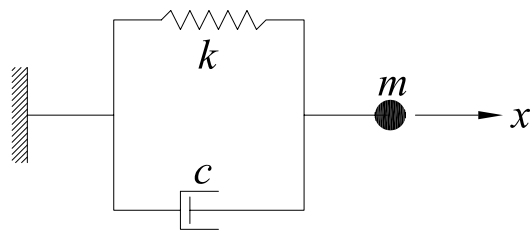


Fig. 1: System med 1 frihedsgrad

Systemet består af en masse,  $m$ , en fjeder med karakteristikkene  $k$  og en dæmper, som omsætter kinetisk energi til varme. Dæmperen karakteriseres med konstanten  $c$ . Systemet antages i ligevægt for  $x = 0$ , og hastigheden,  $\dot{x}$ , og accelerationen,  $\ddot{x}$ , findes ved differentiation af stedkoordinaten  $x$  med hensyn til tiden henholdsvis 1 og 2 gange.

Der findes flere forskellige modeller for dæmpning, og den matematiske mest enkle er den såkaldte viskose dæmpning, hvor dæmperelementet giver en kraft proportional med hastigheden og modsat rettet bevægelsesretningen, som vist i formel 1

$$R_d = -c\dot{x} \tag{1}$$

hvor  $R_d$  betegner den ækvivalente belastning fra dæmperen. Den viskose dæmpning kan f.eks. bruges til at beskrive dæmpningen fra konstruktionens bevægelse i vand. Denne

modstand vil dog ofte ikke være lineær i hastigheden, men snarere kvadratisk. Dæmpningskraften vil i dette tilfælde kunne skrives som

$$R_d = -c|\dot{x}|\dot{x} \quad (2)$$

Matematisk set er denne form væsentligt mere kompliceret. En dæmpning der alene stammer fra friktion, og altså uafhængig af hastigheden, kan skrives som

$$R_d = -\mu N \text{sign}(\dot{x}) \quad (3)$$

hvor  $\mu N$  angiver friktionskraften. Dæmpningskraften er modsat rettet hastigheden, og dette defineres ved hjælp af *sign*, der giver fortegnet på operanden. Denne formulering er også matematisk set kompliceret. I det følgende anvendes alene viskos dæmpning.

Ved hjælp af Newton's II skrives bevægelsesligningen for systemet som

$$-kx - c\dot{x} + P(t) = m\ddot{x} \quad (4)$$

hvor  $P(t)$  er en ydre kraft virkende på massen.

Med given belastning og givne begyndelsesbetingelser, kan stedkoordinatens variation med tiden findes ved integration af (4). Nedenfor er angivet løsninger for nogle udvalgte specialtilfælde, der karakteriserer typiske dynamiske opførsler.

## Egensvingninger

I dette tilfælde er der ingen ydre belastning, og dæmpningsleddet er også udeladt. Systemet er altså helt isoleret, og den dynamiske analyse bestemmer, hvordan disse såkaldte frie svingninger forløber. Bevægelsesligningen er givet ved:

$$-kx = m\ddot{x} \quad (5)$$

Løsningen til dette system er givet ved

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

hvor  $A$  er amplituden og  $\alpha$  en fasevinkel. Systemets egenfrekvens er givet ved:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

Egenfrekvensen,  $\omega$  er den såkaldte cykliske egenfrekvens med enheden radian per sekund d.v.s. en vinkelhastighed. Tiden for en hel cyklus ( $2\pi$ ) betegnes egensvingningstiden  $T$ , der er givet ved

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Den (naturlige) egenfrekvens  $f$  findes som antallet af svingninger per sekund, d.v.s.  $1/T$ . Enheden betegnes Hertz (Hz), og den må ikke anvendes i forbindelse med cykliske egenfrekvenser.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

Konstanter  $A$  og  $\alpha$  i (6) bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne. Et karakteristisk træk er, at svingningerne vil foregå i det uendelige, og at der ikke er noget tab af energi. Der foregår en tabsfri overgang mellem kinetisk energi og elastisk energi i hver cyklus.

### Dæmpede egensvingninger

I dette tilfælde medtages dæmpningsleddet, og bevægelsesligningen skrives som

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (10)$$

Dæmpningen karakteriseres ved det såkaldte dæmpningsforhold  $\zeta$  givet ved

$$\zeta = \frac{c}{c_0} \quad (11)$$

hvor  $c_0$  definerer den kritiske dæmpning

$$c_0 = 2\sqrt{km} \quad (12)$$

Dæmpningen vil for sædvanlige bygningskonstruktioner være langt mindre end den kritiske dæmpning, og dæmpningsforholdet vil typisk ligge i intervallet 0.01 - 0.05.

Ved hjælp af (10) og (12) omskrives bevægelsesligningen til:

$$\ddot{x} + 2\omega\zeta\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (13)$$

Denne differentiaalligning løses ved standardmetoder, og for  $\zeta < 1$  findes:

$$x = A_0e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right) = A_0e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{1}{1 - \zeta^2}} \cos(\beta t - \phi) \quad (14)$$

hvor  $A_0$  er amplituden til  $t = 0$ . Frekvensen  $\beta$  er givet ved

$$\beta = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (15)$$

og  $\alpha$  udtrykker dæmpningen af systemet.

$$\alpha = \omega\zeta \quad (16)$$

Faseforskydningen  $\phi$  i (14) udtrykker den forsinkelse der kommer i responset p.gr.a. dæmpningen, og faseforskydningen er givet ved:

$$\tan \phi = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (17)$$

Bevægelsen er karakteriseret ved en amplitude, der falder gennem tiden, og en cyklisk variation med frekvensen  $\beta$ . Det dæmpede system svinger med en frekvens, der er mindre end det tilsvarende system uden dæmpning. I modsætning til tilfældet uden dæmpning er der et energitab, som man også betegner energidissipation.

For et lille dæmpningsforhold kan energitabet i en cyklus bestemmes som:

$$w_d \cong \pi c \omega A_t^2 \quad (18)$$

hvor amplituden,  $A_t$ , er maksimaludsvinget i den betragtede periode. Energitalet bliver mindre og mindre, jo mere systemet dæmpes. Dette er forklaringen på, at svingningen aldrig standser helt.

## Tvungne, udæmpede svingninger

Systemet påvirkes af en harmonisk påvirkning givet ved:

$$P = P_0 \cos \omega t \quad (19)$$

hvor  $\omega$  nu betegner belastningens frekvens. Systemets egenfrekvens betegnes,  $\omega_1$ , som er givet ved:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

Bevægelsesligningen er givet ved:

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \cos \omega t \quad (21)$$

Løsningen ses at kunne skrives som

$$x = C \cos \omega t \quad (22)$$

Ved indsættelse i differentiallygningen bestemmes  $C$  til:

$$C = \frac{P_0}{-m\omega^2 + k} \quad (23)$$

Ved yderligere omskrivning findes:

$$x = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cos \omega t \quad (24)$$

hvor  $P_0/k$  er den statiske flytning for en kraft  $P_0$  virkende på systemet.

Den dynamiske forstærkningsfaktor,  $f$ , defineres ved:

$$f = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (25)$$

Forstærkningsfaktoren angiver, hvor meget flytningen øges i forhold til den statiske situation. Når belastningsfrekvensen nærmer sig systemets egenfrekvens, bliver  $f$  meget stor. Dette betegnes resonans. I modellen uden dæmpning er der en singularitet, men selv med dæmpning er der en markant forøgelse.

For belastningsfrekvenser over systemets egenfrekvens, bliver forstærkningsfaktoren negativ. Dette svarer til, at flytning og belastning er i modfase, dvs. faseforskydningen er  $\pi$ . Den absolutte værdi af forstærkningsfaktoren falder med stigende belastningsfrekvens, og for  $\omega = \sqrt{2}\omega_1$  er den 1. For belastningsfrekvenser større end  $\sqrt{2}\omega_1$  er responset mindre end fra den tilsvarende statiske belastning. Systemet har en begrænset følsomhed for tidsafhængige påvirkninger, og bliver belastningsvariationen tilstrækkelig hurtig mærker systemet kun en del af påvirkningen. Systemets egenfrekvens er et mål følsomheden.



## Tvungne, dæmpede svingninger

I dette tilfælde medtages dæmpning, og bevægelsesligningen bliver

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos \omega t \quad (26)$$

Idet dæmpningsforholdet  $\zeta$  defineres som tidligere, (11), omskrives (26) til:

$$\ddot{x} + 2\omega_1\zeta\dot{x} + \omega_1^2x = \frac{P_0}{k} \omega_1^2 \cos \omega t \quad (27)$$

hvor  $\omega_1$  betegner systemets egensvingningsfrekvens.

Løsningen skrives på formen:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (28)$$

Ved indsættelse af (28) i (27) og omordning af leddene findes:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2)(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + 2\zeta\omega_1(C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t) \\ = \frac{P_0}{k} \omega_1^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (29)$$

Ved at matche led med  $\sin \omega t$  og  $\cos \omega t$  bestemmes de 2 arbitrære konstanter  $C_1$  og  $C_2$ . Efter nogen regning findes

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{P_0}{k} 2\zeta \frac{\omega}{\omega_1} f_1 \\ C_2 &= \frac{P_0}{k} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) f_1 \end{aligned} \quad (30)$$

hvor den dæmpede forstærkningsfaktor  $f_1$  er givet ved:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (31)$$

Den dæmpede forstærkningsfaktor har ingen singularitet, men for  $\omega \rightarrow \omega_1$  bliver den stor, idet  $\zeta$  typisk er af størrelsesorden 0.05.

Indsættes (31) i løsningen (28) findes:

$$x = \frac{P_0}{k} f_1 \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega t + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \cos \omega t\right) \quad (32)$$

Ved hjælp af sin / cos relationer kan udtrykket i parentes omskrives, og man får:

$$x = \frac{P_0}{k} f_1 \cos(\omega t - \varphi) \quad (33)$$

hvor faseforskydningen  $\varphi$  er bestemt ved

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (34)$$

Faseforskydningen angiver, at der er en forsinkelse mellem belastningen og flytningen. Maksimum for flytningen kommer  $\varphi$  senere end maksimum for belastning.

### Transient belastning

I modsætning til den harmoniske belastning har indsvingningsforløbet en central betydning. For at illustrere dette betragtes et simpelt eksempel i det følgende. Belastningen påføres systemet, der er i ro, med en last, der stiger lineært over intervallet  $t_1$ , som vist i Figur 2.

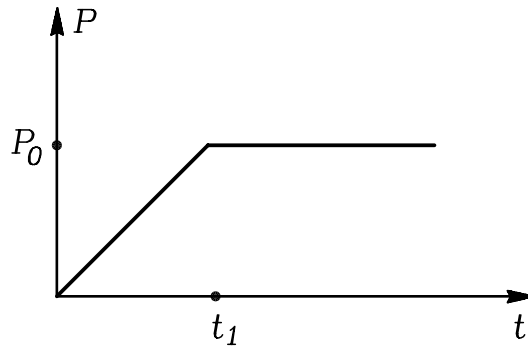


Fig. 2: Transient last

I første omgang betragtes et udæmpet system. Systemet har massen  $m$  og stivheden  $k$ . Egenfrekvensen betegnes  $\omega_1$ . I intervallet 0 til  $t_1$  er den styrende differentialligning:

$$-kx + P_0 \frac{t}{t_1} = m\ddot{x} \quad (35)$$

Løsningen til denne ligning er:

$$x = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t + \frac{P_0}{k} \frac{t}{t_1} \quad (36)$$

hvor de arbitrære konstanter  $A$  og  $B$  findes af begyndelsesbetingelserne.

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (37)$$

Efter udregning af  $A$  og  $B$  findes:

$$x = \frac{P_0}{k} \left( \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_1 t_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (38)$$

I intervallet  $[t_1; \infty]$  er den styrende differentialligning:

$$-kx + P_0 = m\ddot{x} \quad (39)$$

der har løsningen

$$x = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t + \frac{P_0}{k} \quad (40)$$

Begyndelsesbetingelser er i dette tilfælde, at der skal være kontinuitet i  $x$  og  $\dot{x}$  for  $t = t_1$ . Ved udregning findes

$$x = \frac{P_0}{k} \left( 1 + \frac{\cos \omega_1 t_1 - 1}{\omega_1 t_1} \sin \omega_1 t - \frac{\sin \omega_1 t_1}{\omega_1 t_1} \cos \omega_1 t \right) \quad (41)$$

Dette er en harmonisk svingning, og da systemet ikke er dæmpet, vil svingningen fortsætte i det uendelige.

For at vurdere indflydelsen af den transiente lastpåførsel ønskes den maksimale værdi af flytningen bestemt.

Ved hjælp af sin / cos relationerne skrives  $x$  fra formel (41) som

$$x = \frac{P_0}{k} \left( 1 + \frac{\sqrt{2(1 - \cos \omega_1 t_1)}}{\omega_1 t_1} \sin(\omega_1 t - \varphi) \right) \quad (42)$$

hvor fasevinklen  $\varphi$  er bestemt ved:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \omega_1 t_1}{1 - \cos \omega_1 t_1} = \cot \omega_1 t_1 / 2 \quad (43)$$

Forstærkningsfaktoren for lasten defineres som forholdet mellem den maksimale udbøjning og den statiske udbøjning. Man ser direkte, at forstærkningsfaktoren,  $f_t$  er givet ved:

$$f_t = 1 + \frac{\sqrt{2(1 - \cos \omega_1 t_1)}}{\omega_1 t_1} \quad (44)$$

For  $t_1 < 2\pi/\omega$  er tidspunktet for maksimum,  $t_{max}$  givet ved

$$t_{max} = \frac{t_1}{2} + \frac{\pi}{\omega} \quad (45)$$

Et stød er karakteriseret ved en meget kort belastningstid,  $t_1$ , og ved grænseovergang, hvor  $t_1 \rightarrow 0$  findes  $f_t = 2$ , som svarer til værdien fra litteraturen.

Et virkeligt system vil være dæmpet og nedenfor er vist principperne i beregningerne. Beregningerne af forstærkningsfaktoren er dog en del mere kompliceret, og ikke alle detaljer medtages, men der henvises til (Damkilde 1999). Dæmpningen i systemet er viskos, med det relative dæmpningsforhold  $\zeta$ .

I intervallet  $[0; t_1]$  er den styrende differentiaalligning givet ved

$$-kx - c\dot{x} + P_0 \frac{t}{t_1} = m\ddot{x} \quad (46)$$

Løsningen til differentiaalligningen kan skrives som:

$$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_d) - \frac{P_0}{k} \frac{c}{kt_1} + \frac{P_0}{k} \frac{t}{t_1} \quad (47)$$

hvor de arbitrære konstanter  $A$  og  $\varphi_d$  findes af begyndelsesbetingelserne i  $t = 0$ , se (37). Parametrene  $\alpha$  og  $\beta$  er defineret i (15) og (16).

Ved udregning findes

$$\tan \varphi_d = \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2} \quad (48)$$

og dermed findes:

$$x = \frac{P_0}{k} \left[ -\frac{1}{\omega t_1} e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\beta t - \varphi_d) - \frac{2\zeta}{\omega t_1} + \frac{t}{t_1} \right] \quad (49)$$

I intervallet  $[t_1; \infty]$  er den styrende differentialligning givet ved:

$$-kx - c\dot{x} + P_0 = m\ddot{x} \quad (50)$$

Løsningen til denne skrives som:

$$x = \frac{P_0}{k} + A_1 e^{-\alpha(t-t_1)} \sin(\beta(t-t_1) - \varphi_1) \quad (51)$$

hvor de arbitrære konstanter  $A_1$  og  $\varphi_1$  findes af krav til kontinuitet i  $x$  og  $\dot{x}$  for  $t = t_1$ .

I Figur 3 er forløbet af de 2 indsvingningsforløb illustreret. Dæmpningsforholdet er relativt højt 0.05.

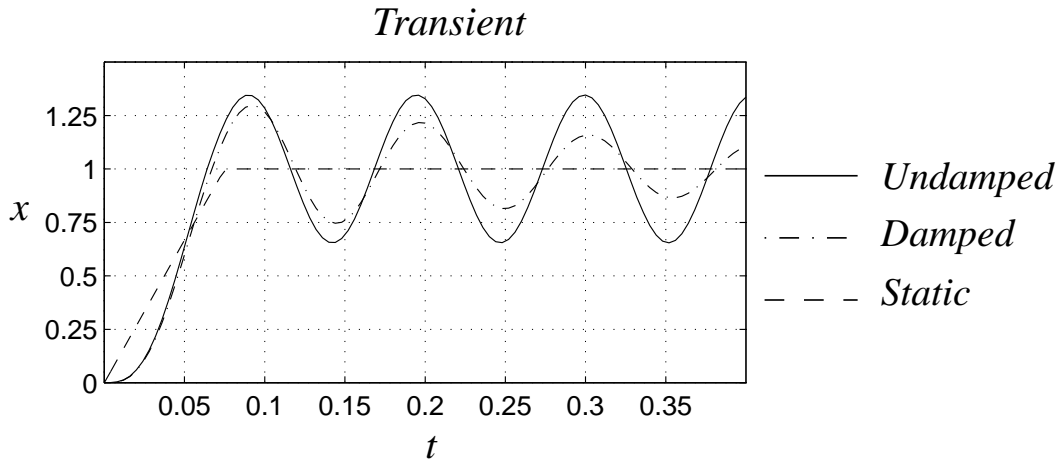


Fig. 3: Dæmpet og udæmpet indsvingningsforløb

Efter en del analytiske beregninger kan den dæmpede forstærkningsfaktor bestemmes til:

$$d = 1 + \frac{\sqrt{2(\cosh \alpha t_1 - \cos \beta t_1)}}{\omega t_1} e^{-\alpha/(2\beta)[\pi - \varphi_d + \beta t_1 + 2\varphi_1]} \quad (52)$$

hvor fasevinklerne  $\varphi_1$ , der skal ligge i intervallet  $[-\pi/2; \pi]$ , er bestemt som

$$\varphi_1 = \varphi_r - \beta t_1/2 + \varphi_d \quad (53)$$

Faseforskydningen  $\varphi_r$  er bestemt som

$$\tan \varphi_r = \coth \frac{\alpha t_1}{2} \tan \frac{\beta t_1}{2} \quad (54)$$

hvor der til  $\varphi_r$  skal adderes  $\pi$  for hver hel cyklus, der er indeholdt i  $t_1$ . For  $t_1 < 2\pi/\beta$  er  $\varphi_r \in [0; \pi/2]$ .

Tidspunktet for maksimum,  $t_{max}$ , er givet ved

$$t_{max} = t_1 + \beta \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_r}{2} + \varphi_1 \right) \quad (55)$$

## Bjælkesvingninger

For at illustrere svingninger af konstruktioner med en kontinuert massefordeling opstilles den styrende differentiaalligning for svingninger af en bjælke. Bjælken forudsættes plan med et konstant tværsnit, hvilket vil sige at både  $EI$  og  $\mu$ , massen pr. længde, er konstante. Der tages kun hensyn til deformationer fra bøjningsmomenter. Der er ingen fordelt belastning på bjælken.

Bevægelsesligningen for et infinitesimalt udsnit af bjælken giver

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \mu \ddot{w} \quad (56)$$

hvor  $x$  er koordinaten langs bjælkeaksen. Der afledes partielt med hensyn til  $x$ , idet forskydningskraften  $V$  både er en funktion af tiden,  $t$  og  $x$ . Tværuddbøjningen betegnes  $w$ , og  $\ddot{w}$  er accelerationen. I forhold til den statiske løsning er der et accelerationsled  $\mu \ddot{w}$ .

Idet der ikke tages hensyn til rotationsinerti af tværsnittet gælder:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (57)$$

hvor  $M$  er bøjningsmomentet.

Indføres den konstitutive lov

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (58)$$

skrives bevægelsesligningen som:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \ddot{w} = 0 \quad (59)$$

Bjælakens egensvingninger vil være harmoniske, og tværflytninger kan skrives som et produkt af en sted- og tidsafhængig faktor

$$w(x, t) = w(x) \cos \omega_k t \quad (60)$$

hvor  $\omega_k$  er den  $k$ 'te egenfrekvens.

Indføres udtrykket for  $w(x, t)$  i den styrende differentiaalligning (59) fås:

$$EI w(x)_{,,,} - \mu \omega_k^2 w(x) = 0 \quad (61)$$

hvor  $w(x)_{,,,}$  betyder 4 gange afledet mht.  $x$ .

Løsningen til (61) kan skrives som:

$$w(x) = A \sin(\lambda_k \frac{x}{l}) + B \cos(\lambda_k \frac{x}{l}) + C \sinh(\lambda_k \frac{x}{l}) + D \cosh(\lambda_k \frac{x}{l}) \quad (62)$$

hvor den dimensionsløse konstant  $\lambda_k$  er defineret ved:

$$\lambda_k = l \left( \frac{\mu \omega_k^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (63)$$

De arbitrære konstanter  $A, B, C$  og  $D$  bestemmes af bjælakens understøtningsbetingelser. Bjælakens egensvingningsfrekvenser findes ved at kræve egentlige løsninger til  $A, B, C$  og  $D$ .

### Eksempel: Simpelt understøttet bjælke

Vi ønsker at bestemme egensvingningsfrekvenserne og egensvingningsformerne for en simpelt understøttet bjælke med længden  $\ell$ .

Understøtningsbetingelserne er:

$$\begin{aligned}w(0) &= w_{,,}(0) = 0 \\w(\ell) &= w_{,,}(\ell) = 0\end{aligned}\tag{64}$$

Ved at benytte betingelserne i  $x = 0$  fås, at  $B + D = 0$  og  $-B + D = 0$ , hvilket medfører:

$$B = D = 0\tag{65}$$

Betingelsen i  $x = \ell$  giver:

$$\begin{aligned}A \sin \lambda_k + C \sinh \lambda_k &= 0 \\-\lambda_k^2 A \sin \lambda_k + \lambda_k^2 C \sinh \lambda_k &= 0\end{aligned}\tag{66}$$

For at få egentlige løsninger til  $A$  og  $C$  må ligningssystemets determinant være 0. Ved udregning findes:

$$2\lambda_k^2 \sin \lambda_k \sinh \lambda_k = 0\tag{67}$$

Denne ligning kan kun opfyldes, hvis

$$\sin \lambda_k = 0\tag{68}$$

hvilket giver

$$\lambda_k = k\pi\tag{69}$$

Ved indsættelse i (63) findes:

$$\omega_k = k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad k = 1, 2, \dots\tag{70}$$

Ved løsning af ligningssystemet i (67) findes, at  $C = 0$ .

Egensvingningsformen er givet ved

$$w(x) = A \sin\left(k\pi \frac{x}{\ell}\right)\tag{71}$$

hvor  $A$  er en konstant, der er ubestemt i egensvingningsanalysen.

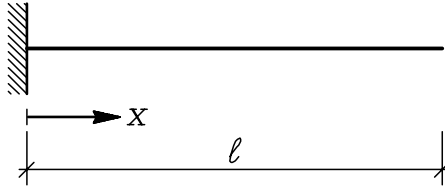


Fig. 4: Eksempel: Udkraget bjælke

### Eksempel: Udkraget bjælke

Vi betragter en udkraget bjælke med længden  $\ell$ .

Understøtningsbetingelserne giver

$$\begin{aligned} w(0) &= w_{,}(0) = 0 \\ w_{,,}(\ell) &= w_{,,,}(\ell) = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

hvor randbetingelsen i  $x = \ell$  svarer til, at forskydningskraften og momentet er 0.

Betingelserne i  $x = 0$  giver

$$C = -A \quad \text{og} \quad D = -B \quad (73)$$

Indføres disse betingelser i det generelle udtryk for  $w(x)$  fra (69) fås

$$w(x) = A\left(\sin \frac{\lambda x}{\ell} - \sinh \frac{\lambda x}{\ell}\right) + B\left(\cos \frac{\lambda x}{\ell} - \cosh \frac{\lambda x}{\ell}\right) \quad (74)$$

De afledede af  $w(x)$  findes let ved udregning til:

$$\begin{aligned} w_{,}(x) &= A\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2\left(-\sin \frac{\lambda x}{\ell} - \sinh \frac{\lambda x}{\ell}\right) + \\ &\quad B\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2\left(-\cos \frac{\lambda x}{\ell} - \cosh \frac{\lambda x}{\ell}\right) \\ w_{,,}(x) &= A\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^3\left(-\cos \frac{\lambda x}{\ell} - \cosh \frac{\lambda x}{\ell}\right) + \\ &\quad B\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^3\left(\sin \frac{\lambda x}{\ell} - \sinh \frac{\lambda x}{\ell}\right) \end{aligned} \quad (75)$$

For  $x = \ell$  skal de afledede i (75) være 0, og for at få egentlige løsninger til  $A$  og  $B$  skal determinanten være 0. Ved udregning findes betingelsen til

$$1 + \cos \lambda \cosh \lambda = 0 \quad (76)$$

hvor det er udnyttet at  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

Betingelsen i (76) kan ikke løses analytisk, og numerisk bestemmes den mindste værdi af  $\lambda$ , der er løsning til (76) som:

$$\lambda = 1.875 \quad (77)$$



Den laveste egensvingningsfrekvens bliver

$$\omega = \frac{1.875^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (78)$$

Egensvingningsformen findes ved f.eks. at vælge  $A$  arbitrært, og bestemme  $B$  af en af ligningerne i (75) for  $x = \ell$ . Bortset fra afrundingsfejl, skal hver ligning give det samme. Ved udregning findes:

$$C = -A \quad \text{og} \quad D = -B \quad (79)$$

Egensvingningsformen skrives derfor som:

$$w(x) = A \left( \sin \frac{\lambda x}{\ell} - \sinh \frac{\lambda x}{\ell} \right) - 1.362A \left( \cos \frac{\lambda x}{\ell} - \cosh \frac{\lambda x}{\ell} \right) \quad (80)$$

Ved stabilitetsberegninger kan en udkraget bjælke opfattes som en simpelt understøttet bjælke med den dobbelte længde. Ved svingningsanalyse gælder den analogi ikke, og ved sammenligning af egenfrekvenserne i (70) og (78) ses, at en udkraget bjælke med længden  $\ell/2$  svarer til en simpelt understøttet bjælke med længden  $0.838\ell$ . Forskellen mellem de 2 tilfælde er, at massen bevæges i gennemsnit mere i den simpelt understøttede, hvilket man kan overbevise sig om ved at optegne egensvingningsformerne. Ved stabilitetsproblemet er det de afledede af tværflytningen, der styrer problemet, og de er ens i de to tilfælde.

## Svingningsanalyse af rammekonstruktioner

### Bøjningssvingninger

Som udgangspunkt analyseres en bjælke, der svinger med en given frekvens,  $\omega$ . Den styrende differentialligning er givet i (61), og den principielle løsning er beskrevet i (62), som for nemheds skyld er gengivet nedenfor:

$$w(x) = A \sin \left( \lambda_k \frac{x}{l} \right) + B \cos \left( \lambda_k \frac{x}{l} \right) + C \sinh \left( \lambda_k \frac{x}{l} \right) + D \cosh \left( \lambda_k \frac{x}{l} \right) \quad (81)$$

hvor  $\lambda_k = l \left( \frac{\mu \omega_k^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}$ .

Differentialligningen kan løses for de sædvanlige elementartilfælde, som vist i figur 5.

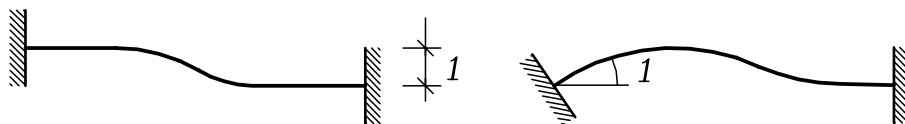


Fig. 5: Elementartilfælde

Elementarflytningerne skrives som:

$$w_i(x, t) = w_i(x) \sin \omega t \quad (82)$$

Løsningen af de enkelte elementartilfælde  $w_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , giver formen  $w_i(x)$ , og de tilhørende snitkræfter i bjælkeenderne. Beregningerne er i princippet enkle, men omfanget bliver ret omfattende. Slutresultatet giver en sammenhæng mellem flytningerne i bjælkeenderne og de tilhørende snitkræfter. Denne sammenhæng skrives på matrixform som vist i (83)

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} F_6(\lambda) & \ell F_4(\lambda) & F_5(\lambda) & \ell F_6(\lambda) \\ & \ell^2 F_2(\lambda) & -\ell F_3(\lambda) & \ell^2 F_1(\lambda) \\ & & F_6(\lambda) & -\ell F_4(\lambda) \\ \text{sym} & & & \ell^2 F_2(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

hvor funktionerne  $F_1 - F_6$  er defineret som:

$$\begin{aligned} fF_1(\lambda) &= \lambda(\sinh \lambda - \sin \lambda) \\ fF_2(\lambda) &= \lambda(-\cos \lambda \sinh \lambda + \sin \lambda \cosh \lambda) \\ fF_3(\lambda) &= \lambda^2(\cosh \lambda - \cos \lambda) \\ fF_4(\lambda) &= \lambda^2(\sin \lambda \sinh \lambda) \\ fF_5(\lambda) &= \lambda^3(-\sinh \lambda - \sin \lambda) \\ fF_6(\lambda) &= \lambda^3(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda) \\ f &= 1 - \cos \lambda \cosh \lambda \end{aligned} \quad (84)$$

Betegnelserne i (84) svarer til (Koloušek 1973).

Fortegnsregningen for flytninger/drejninger, som svarer til fortegnsregningen for kræfter/momentet, er vist i figur 6.

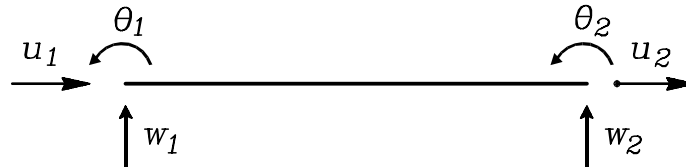


Fig. 6: Definition af flytninger

### Aksiale svingninger

Aksiale bjælkesvingninger beskrives ved differentialligningen

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \ddot{u} = 0 \quad (85)$$

hvor  $u$  er den aksiale flytning, og  $A$  tværsnitsarealet.

Løsningen til den aksiale svingning skrives som:

$$u(x) = A \sin(\lambda_a \frac{x}{l}) + B \cos(\lambda_a \frac{x}{l}) \quad (86)$$

hvor parameteren  $\lambda_a$  er bestemt ved:

$$\lambda_a = \ell \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EA}} \quad (87)$$

Svarende til bjælkesvingningerne kan der opskrives en matrixrelation mellem flytninger og snitkræfter. Idet fortegnssregningen er som angivet i Figur 6 fås:

$$\frac{EA}{\ell} \begin{Bmatrix} \lambda/\tan \lambda & -\lambda/\sin \lambda \\ -\lambda/\sin \lambda & \lambda/\tan \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (88)$$

### Elementmetodeligninger

Ved hjælp af (83) og (88) er opførslen af det enkelte bjælkeelement fastlagt. Analysen af en rammekonstruktion følger princippet i elementmetoden, jvf. F 118. Relationerne i (83) og (88) svarer til den lokale stivhedsmatrix. Den globale stivhedsmatrix findes ved at transformere de lokale stivhedsmatricer til et globalt system og assemblerer dem i den globale stivhedsmatrix. Resultatet er på matrixform skrevet i (89):

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (89)$$

hvor  $\mathbf{K}(\omega)$  er stivhedsmatricen som er en funktion af frekvensen  $\omega$  ( $\lambda$  og  $\lambda_a$  afhænger af  $\omega$ ). Systemflytningerne er  $\mathbf{v}$  og kræfterne  $\mathbf{r}$ .

Egensvingningsfrekvenserne bestemmes som de værdier af  $\omega$ , der giver en singular stivhedsmatrix. Derved kan man finde egentlige løsninger for et system uden ydre last.

Beregningsteknisk foregår det ved at gætte på en værdi af  $\omega$  og udregne  $\mathbf{K}(\omega)$ . Herefter udregnes determinanten, og ved at tælle fortegnsskift i diagonalen og ud fra determinantens størrelse bestemmes et nyt bud på  $\omega$ . Metoden er relativt kostbar, idet man skal udregne  $\mathbf{K}(\omega)$  mange gange, og bestemme determinanten, hvilket svarer til at faktorisere matricen. Fordelen er, at rammekonstruktionen kun skal opdeles i såkaldte naturlige elementer, svarende til en lineær beregning.

Alternativt kan den lokale stivhedsmatrix skrives som en rækkeudvikling af  $\lambda$  eller  $\lambda_a$ . Ved at vælge elementlængden passende lille kan stivhedsmatricen skrives som en sum af et konstant bidrag svarende til den elastiske stivhedsmatrix og et led proportionalt med  $\omega^2$ . Svarende til stivhedsrelationen i (89) fås:

$$(\mathbf{K}_{\text{elastisk}} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (90)$$

hvor det første led i rækkeudviklingen udgøres af den såkaldte massematrix  $\mathbf{M}$ . Bestemmelsen af egensvingningsfrekvenser er som før baseret på at finde de værdier af  $\omega$ , der giver en singularitet i  $\mathbf{K}_{\text{elastisk}} - \omega^2\mathbf{M}$ . Beregningsteknisk er det dog noget enklere, idet (90) svarer til et lineært egenverdiproblem, mens (89) gav et ikke-lineært egenverdiproblem. Matricerne  $\mathbf{K}_{\text{elastisk}}$  og  $\mathbf{M}$  skal kun beregnes en gang, og løsningen foregår f.eks. ved invers vektoriteration, jvf. F 118. Prisen for det enklere egenverdiproblem er flere ubekendte, idet elementlængden skal være passende lille af hensyn til nøjagtigheden af rækkeudviklingen i (90). Beregningsresultatet vil altså afhænge af elementinddelingen svarende til stabilitetsberegninger. Senere vil dette blive illustreret ved nogle eksempler. Rækkeudviklingen i (90) foretages på den lokale stivhedsmatrix. Beregningerne bliver temmelig omfattende, og

resultatet er vist i (91).

$$\mathbf{m} = \frac{\mu\ell}{420} \left\{ \begin{array}{cccccc} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ & & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 156 & -22\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{array} \right\} \quad (91)$$

hvor både aksial og tværsvingninger er medtaget. Rækkefølgen den sædvanlige:  $u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2$ , jvf. Figur 5.

Ved sammenligning med stivhedsmatricen for et elastisk underlag ses, at indholdet i  $\mathbf{m}$  svarer til bidraget fra det elastiske underlag, idet fjederkonstanten  $k$  erstattes af  $-\omega^2\mu$ . Sammenlignes de styrende differentialligninger for de 2 tilfælde, ses at den eneste forskel er retningen af belastningen fra henholdsvis inertikraften og den fordelte fjederkraft. Løsningerne til differentialligningerne bliver ret forskellige, idet fortegnsændringen giver ret forskellige basisfunktioner. Det første led i en rækkeudvikling vil dog være ens.

En mere direkte måde at bestemme massematricen på er ved at anvende tilnærmede løsninger til differentialligninger. Flytningerne langs bjælken  $u(x)$  og  $w(x)$  interpoleres ud fra de overtallige i elementets endepunkter ved hjælp af de såkaldte formfunktioner  $\mathbf{N}(x)$ , se F118. Massematricen, som beskriver inertiledet  $\mu\ddot{w}$  i (59), skrives som:

$$\mathbf{m} = \int_0^\ell \mu \mathbf{N}^T(x) \mathbf{N}(x) dx \quad (92)$$

Med anvendelse af de sædvanlige bjælkeformfunktioner fra F118, kan formel (91) findes ved direkte udregning af (92).

## Eksempel: Simpelt understøttet bjælke

Egensvingningsfrekvensen bestemmes først ud fra et element

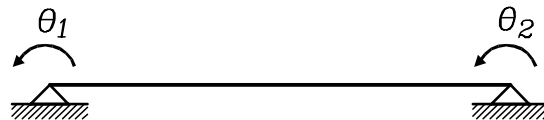


Fig. 7: Eksempel: Simpelt understøttet bjælke

Stivhedsmatricen er:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{\ell} \left\{ \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right\} \quad (93)$$

Massematricen er:

$$\mathbf{m} = \frac{\mu\ell^3}{420} \left\{ \begin{array}{cc} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{array} \right\} \quad (94)$$

Af symmetri Grunde må der gælde, at i egensvingningen er  $\theta_1 = -\theta_2$ .  
Egenværdiproblemet i (82) reduceres derfor til:

$$\frac{EI}{\ell} 2\theta_1 - \omega^2 \frac{\mu \ell^3}{420} 7\theta_1 = 0 \quad (95)$$

Ved udregning findes

$$\omega = 1.109 \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (96)$$

hvilket er ca. 11 % større end den eksakte værdi, (74).

For at forbedre resultatet opdeles bjælken i 2. Den laveste egensvingning er symmetrisk, og elementmodellen kan derfor reduceres til den i Figur 8 viste.

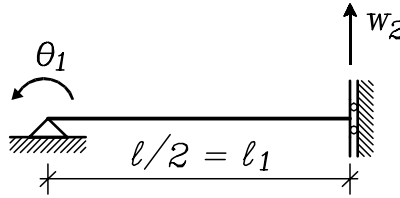


Fig. 8: Elementmodel til symmetrisk svingning

Stivhedsmatricen er:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{\ell_1^3} \begin{Bmatrix} 12 & -6\ell_1 \\ -6\ell_1 & 4\ell_1^2 \end{Bmatrix} \quad (97)$$

Massematricen er:

$$\mathbf{m} = \frac{\mu \ell_1}{420} \begin{Bmatrix} 156 & 13\ell_1 \\ 13\ell_1 & 4\ell_1^2 \end{Bmatrix} \quad (98)$$

Egenværdiproblemet defineres ved hjælp af (90) til

$$(\mathbf{k}_{\text{elastisk}} - \omega^2 \mathbf{m}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (99)$$

hvor  $\mathbf{v}^T = \{w_2; \theta_1\}^T$ .

Idet drejningen  $\theta_1$  erstattes med  $\ell_1 \theta_1$ , kan egenværdiproblemet skrives som

$$\left( \frac{EI}{\ell_1^3} \begin{Bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{Bmatrix} - \omega^2 \frac{\mu \ell_1}{420} \begin{Bmatrix} 156 & 13 \\ 13 & 4 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_2 \\ \ell_1 \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (100)$$

Ved løsning af en 2. grads ligning i  $\omega^2$  findes den laveste egenfrekvens til:

$$\omega = 1.0039 \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (101)$$

Fejlen er i dette tilfælde ganske ubetydelig, ca. 0.4 %.

## Eksempel: Indspændt bjælke

Egensvingningsfrekvensen bestemmes ud fra 1 element.

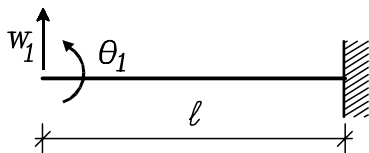


Fig. 9: Eksempel: Indspændt bjælke

Stivhedsmatricen er:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 \end{Bmatrix} \quad (102)$$

Massematricen er

$$\mathbf{m} = \frac{\mu\ell^3}{420} \begin{Bmatrix} 156 & 22\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 \end{Bmatrix} \quad (103)$$

hvor der anvendes de flytningsovertallige  $\mathbf{v}^T = \{w_1; \theta_1\}^T$ .

Egenværdiproblemet defineres ved hjælp af (90) til:

$$\left( \frac{EI}{\ell^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{Bmatrix} - \omega^2 \frac{\mu\ell}{420} \begin{Bmatrix} 156 & 22 \\ 22 & 4 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \ell\theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (104)$$

Ved løsning af en 2. grads ligning i  $\omega^2$  findes den laveste egenfrekvens til:

$$\omega = 1.0049 \frac{1.875^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (105)$$

hvilket er ca. 0.5 % fra den numeriske løsning til den eksakte formulering (77).

## Indflydelse fra normalkræfter

Tryknormalkræfter nedsætter stivheden, og ændrer dermed også egenfrekvenserne i nedadgående retning. I enkelte tilfælde kan den kombinerede indflydelse af svingning og normalkraft løses analytisk, men generelt må den tilnærmede metode anvendes.

Ved den tilnærmede metode er formuleringen enkel, idet den sædvanlige stivhedsmatrix  $\mathbf{k}$  erstattes af  $\mathbf{k}^*$ , defineret ved

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k}_{\text{elastisk}} + N\mathbf{k}_g \quad (106)$$

hvor  $\mathbf{k}_g$  er den geometriske matrix, og  $N$  er normalkraften regnet positiv som træk. Den geometriske matrix  $\mathbf{k}_g$  er vist i (107), og en mere uddybende forklaring kan f.eks. findes i

(Damkilde 1990).

$$\mathbf{k}_g = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2}{15} \ell & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \ell \\ & \text{sym} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5} \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2}{15} \ell \end{array} \right\} \quad (107)$$

## Generel elementmetodeformulering

Ved en elementmetodeformulering diskretiseres kontinuerte system til et system med et endeligt antal frihedsgrader,  $n$ . Flytningerne, hastighederne og accelerationerne af de enkelte frihedsgrader betegnes  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  og  $\ddot{\mathbf{v}}$ , hvor hver af vektorerne har  $n$  elementer. Sammenhængen mellem flytningerne og de elastiske kræfter bestemmes af den globale stivhedsmatrix  $\mathbf{K}$ . Tilsvarende kan der opstilles en dæmpningsmatrix,  $\mathbf{C}$ , og en massematrix,  $\mathbf{M}$ , som allerede er omtalt i forbindelse med bjælkesvingninger.

De  $n$  styrende differentiaalligninger findes, da ved analogi til bevægelsesligningen for 1-frihedsgradssystemet, (4).

$$-\mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{R}(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} \quad (108)$$

hvor  $\mathbf{R}$  definerer belastningen på hver frihedsgrad.

Analogt til opbygningen af stivhedsmatricen,  $\mathbf{K}$ , kan  $\mathbf{C}$  og  $\mathbf{M}$  opbygges af bidrag fra de enkelte elementer. Nedenfor er angivet udtryk for de lokale bidrag  $\mathbf{k}$  og  $\mathbf{m}$ .

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (109)$$

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (110)$$

hvor  $\mathbf{B}$  betegner tøjningsinterpolationsmatricen og  $\mathbf{N}$  flytningsinterpolationsmatricen. Den konstitutive lov definerer  $\mathbf{D}$  og  $\rho$  er densiteten. Massematricen for et bjælkeelement blev opstillet i (91), og kunne også være beregnet ved hjælp af (110). Den såkaldte konsistente massematrix defineret i (110) erstattes nogle gange af en såkaldt lumpet massematrix, som kun indeholder egentlige elementer i diagonalen.

Dæmpningen er en fysisk størrelse, som er vanskelig at beskrive, og dæmpningsmatricen beskrives derfor indirekte. Strukturel dæmpning defineres ofte ved hjælp af Rayleigh dæmpning, hvor

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (111)$$

hvor  $\alpha$  og  $\beta$  er parametre.

Denne beskrivelse er meget velegnet i forbindelse med modalanalyse. Alternativt beskrives dæmpningen som relative dæmpningsforhold for de enkelte modalformer, se senere ved modalanalyse. Dæmpningen kan også modelleres ved særlige elementer, som dermed fastlægger  $\mathbf{C}$ . Dette er relevant, hvor konstruktionens svingninger kontrolleres med dæmpningsled, hvis fysiske opførsel er velbeskrevet.

I det følgende angives de numeriske løsningsalgoritmer for special tilfælde.

### Egensvingninger

Idet dæmpningen ikke medtages fås

$$-\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} \quad (112)$$



Svingningerne bliver harmoniske, og alle frihedsgrader er i fase. Det vil sige, at flytningerne kan beskrives med en amplitude, som vist nedenfor:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v} \cos \omega t \quad (113)$$

hvor  $\omega$  er systemets egensvingningsfrekvens. Indsættes (113) i bevægelsesligningen (112) fås:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (114)$$

hvilket er et lineært egenværdiproblem. Systemet har ligeså mange egenverdier som frihedsgrader, men normalt ønskes kun et fåtal af de laveste egenfrekvenser bestemt. Der kan f.eks. anvendes subspace iteration. Til hver egensvingningsfrekvens hører en egensvingningsform, som beskriver formen, mens størrelsen er ubestemt. Fra teorien om egenværdiproblemer vides, at de enkelte egensvingningsformer, er ortogonale som vist nedenfor

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j &= 0 & \text{for } i \neq j \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j &= 0 & \text{for } i \neq j \end{aligned} \quad (115)$$

hvor  $\mathbf{v}_i$  er egensvingningsformen hørende til en  $i$ 'te egenverdi.

Hensyntagen til indflydelse fra normalkræfter fås ved at modificere  $\mathbf{K}$  med den geometriske stivhedsmatrix  $\mathbf{K}_g$ , jvf. (106).

Hvis dæmpning medtages bliver problemet mere komplekst, idet der vil være en faseforskydning mellem de enkelte frihedsgrader.

## Tidsintegration

I denne del behandles den generelle ligning (108), og der formuleres en løsning til bestemmelse af den tidslige variation. Metoderne kan også benyttes i forbindelse med modalanalyse, se senere.

Bevægelsesligningerne løses i en række tidsskridt med afstanden  $\Delta t$ . Der er 2 principielt forskellige fremgangsmåder: den eksplicitte og den implicitte.

## Eksplicit metode

Udgangspunktet er en interpolation af variationen i  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  og  $\ddot{\mathbf{v}}$  igennem et tidsinterval vist i Figur 10.

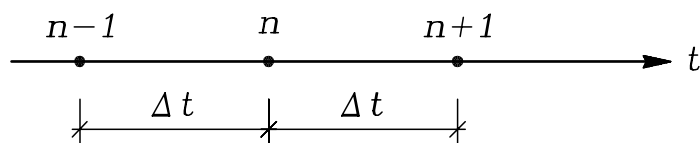


Fig. 10: Tidsakse med punkter

Tilstandene i punkterne  $n-1$  og  $n$  antages kendte, og der ønskes en metode til bestemmelse af tilstanden i punkt  $n+1$ .

Flytningernes tidsvariation interpoleres kvadratisk mellem de 3 punkter. Idet det arbitrært vælges, at tilstand  $n$  svarer  $t = 0$ , fås

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_n + \frac{t}{2\Delta t}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_{n-1}) + \frac{t^2}{2\Delta t^2}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_{n-1} - 2\mathbf{v}_n) \quad (116)$$

Ved differentiation af udtrykket kan opstilles udtryk for hastighed og acceleration i punkt  $n$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_n &= \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_{n-1}) \\ \ddot{\mathbf{v}}_n &= \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{v}_{n+1} - 2\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n-1}) \end{aligned} \quad (117)$$

Bevægelsesligningerne ønskes opfyldt i punktet  $n$ , og ved indsættelse af (117) i (108) fås

$$\begin{aligned} -\mathbf{K}\mathbf{v}_n - \mathbf{C}\frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_{n-1}) + \mathbf{R}_n \\ = \mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{v}_{n+1} - 2\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n-1}) \end{aligned} \quad (118)$$

Idet  $\mathbf{v}_{n-1}$  og  $\mathbf{v}_n$  antages kendte omordnes leddene

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right]\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{R}_n - \mathbf{K}\mathbf{v}_n + \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(2\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1}) \\ + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{v}_{n-1} \end{aligned} \quad (119)$$

Ved hjælp af denne ligning kan flytningen  $\mathbf{v}_{n+1}$  bestemmes, og herefter bestemmes  $\mathbf{v}_{n+2}$ . Ved beregningen faktoriseres kun  $\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}$ , og stivhedsmatricen  $\mathbf{K}$  indgår kun til beregning af elastiske kræfter. En forudsætning er, at der er tilknyttet masse/dæmpning til alle frihedsgrader for at kunne faktorisere. Metoden er beregningsteknisk bekvem, men til gengæld skal tidsskridtet vælges lille for at sikre stabilitet af løsningen.

Kravet er

$$\Delta t < \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (120)$$

hvor  $\omega_{\max}$  er den største egenfrekvens i systemet. Dette krav giver ofte meget små tidsskridt, som er styret af det højfrekvente konstruktionsrespons, som ellers er uinteressant. Mangel på stabilitet viser sig ved, at tilfældige fejl vokser meget hurtigt. Systemet forstærker støjen, og beregningsresultaterne bliver meningsløse.

De indgående matricer  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  og  $\mathbf{C}$  er normalt konstante gennem tiden, og hvert tidsskridt svarer i beregningsomfang til beregning af et lasttilfælde i det lineære tilfælde. Faktoriseringen sker ved start af tidsintegrationen.

Ved kombinationer med geometriske og materialemæssige ikke-lineariteter benyttes den eksplicitte metode ofte, f.eks. i forbindelse med crash-test. Ved at anvende en lumpet

massematrice foregår faktoriseringsen, som skal ske i hvert tidsskridt pga. ikke-lineariteterne, meget effektivt. Den anvendte metode betegnes også central difference, som kendes fra differensligninger.

Begyndelsesbetingelserne skal ved start af integrationen kendes i punkterne 0 og  $-1$ . Normalt kendes kun hastigheden i punkt 0, og der skal derfor laves en speciel løsning i det første punkt.

### Implicit metode

Udgangspunktet er i dette tilfælde en kendt tilstand i punkt  $n$ , dvs. kendte størrelser af  $\mathbf{v}_n$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_n$  og  $\ddot{\mathbf{v}}_n$ . Tilstanden i punkt  $n + 1$  beskrives ud fra tilstanden i  $n$  og  $n + 1$ . Dette forklarer implicit, idet den i modsætning til den eksplicitte, er en interpolation der tager hensyn til sluttilstanden. Der findes flere forskellige implicitte metoder, og her er valgt den såkaldte Newmark metode med konstant gennemsnitsacceleration. De 2 parametre i Newmarks metode betegnes  $\delta$  og  $\alpha$ , se f.eks. (Bathe 1982). Konstant gennemsnitsacceleration fås for  $\delta = \frac{1}{2}$  og  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

Flytningen  $\mathbf{v}_{n+1}$  interpoleres som:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{v}}_n + \dot{\mathbf{v}}_{n+1}) \quad (121)$$

hvor det antages, at gennemsnitshastigheden er gennemsnittet af start og sluthastighed. Tilsvarende bestemmes hastigheden  $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}$ .

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{v}}_n + \ddot{\mathbf{v}}_{n+1}) \quad (122)$$

Bevægelsesligningen (108) ønskes opfyldt i punktet  $n + 1$ , og ved indsættelse af udtrykkene fra (121) og (122) fås:

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}^{\text{eff}} \quad (123)$$

hvor

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (124)$$

og

$$\mathbf{R}_{n+1}^{\text{eff}} = \mathbf{R}_{n+1} + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{v}_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{v}}_n + \ddot{\mathbf{v}}_n\right) + \mathbf{C}\left(\frac{2}{\Delta t}\mathbf{v}_n + \dot{\mathbf{v}}_n\right) \quad (125)$$

I modsætning til den eksplicitte metode indgår stivhedsmatricen i den matrix, der skal faktoriseres, og der er derfor ingen krav til  $\mathbf{M}$ .

Fremgangsmåden er, at bestemme den effektive last,  $\mathbf{R}_{n+1}^{\text{eff}}$ , ud fra tilstanden i punkt  $n$ . Bestemme  $\mathbf{v}_{n+1}$  ud fra (123), og så opdatere  $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}$  og  $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$  ud fra (121) og (122). Beregningssomfanget per tidsskridt er nogenlunde som ved den eksplicitte metode, hvis der ikke sker ændringer i  $\mathbf{K}^{\text{eff}}$ . I modsætning til den eksplicitte er løsningen altid stabil, og man kan derfor typisk anvende noget større tidsskridt. Stabilitet skal ikke forveksles med nøjagtighed, og jo mindre tidsskridt jo mere nøjagtig.

En anden ofte brugt implicit metode betegnes Wilsons  $\theta$ -metode. Princippet er nogenlunde det samme. På et punkt er der dog en væsentlig forskel nemlig, at Wilsons metode indeholder en form for dæmpning specielt for den højfrekvente del. Dette kan være nyttigt i praktiske beregninger, men den kan ikke kontrolleres direkte.

## Modal analyse

I elementmetodebeskrivelsen er udgangspunktet de flytningsovertallige i knuderne, og antallet af frihedsgrader benævnes  $n$ . Udgangspunktet i modalanalysen er i stedet at beskrive tilstanden ved hjælp af systemets egensvingninger. Der er ligeså mange egensvingningsfrekvenser og dermed egensvingningsformer, som der er frihedsgrader.

Som variable benyttes de såkaldte normalkoordinater,  $\eta_i$ , og flytningstilstanden i konstruktioner,  $\mathbf{v}$ , kan skrives som

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}\boldsymbol{\eta} \quad (126)$$

hvor  $\boldsymbol{\eta}$  indeholder normalkoordinaterne, og matricen  $\mathbf{U}$  indeholder egensvingningsformerne  $\mathbf{u}_1$  til  $\mathbf{u}_n$  søjlevis, som vist i nedenstående ligning (127). Størrelsen af normalkoordinaterne afhænger af den valgte normering af egensvingningsformerne.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{Bmatrix} \quad (127)$$

I det styrende differentiaalligningssystem formuleret i (108) indføres normalkoordinaterne vha. (126).

$$\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}\mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\mathbf{U}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{R}(t) \quad (128)$$

hvor  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  og  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$  er henholdsvis hastigheder og accelerationer for normalkoordinaterne. Ved at multiplicere med  $\mathbf{u}_i^T$ , hvor  $\mathbf{u}_i$  er den  $i$ 'te egensvingningsform, i ligning (128) omskrives ligningssystemet til

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{C}\mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}\mathbf{U}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{R}(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (129)$$

Idet ortogonalitetsbetingelsen fra (116) udnyttes fås

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}_i \ddot{\eta}_i = \bar{m}_i \ddot{\eta}_i & i = 1, \dots, n \\ \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}\mathbf{U}\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}\mathbf{u}_i \eta_i = \bar{k}_i \eta_i & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (130)$$

hvor  $\bar{m}_i$  og  $\bar{k}_i$  betegnes henholdsvis den generaliserede masse og stivhed for normalkoordinat  $i$ .

Hvis der benyttes Rayleigh dæmpning, (111), kan en generaliseret dæmpning indføres som:

$$\bar{c}_i = \alpha \bar{m}_i + \beta \bar{k}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (131)$$

For belastningsleddet indføres tilsvarende

$$\bar{r}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{R}(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (132)$$

Med indførelse af de generaliserede størrelser skrives differentiaalligningssystemet som:

$$\bar{m}_i \ddot{\eta}_i + \bar{c}_i \dot{\eta}_i + \bar{k}_i \eta_i = \bar{r}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (133)$$

Med indførelse af normalkoordinaterne er der opnået det meget væsentlige, at de  $n$  koblede differentiaalligninger i (128) er omskrevet til  $n$  ukoblede differentiaalligninger. Den enkelte differentiaalligning kan løses med de metoder, der er beskrevet for systemer med 1 frihedsgrad. En væsentlig forudsætning har været, at dæmpningen er beskrevet ved en linearkombination af masse- og stivhedsmatrix. Hvis det ikke er tilfældet afkobler dæmpningsleddene ikke indbyrdes. Ved at anvende de dæmpede egensvingningsformer kan modal dekomposition anvendes med mere komplicerede dæmpningsmatricer, jvf. (Langen and Sigbjörnsson 1979). Et væsentligt problem i den forbindelse er dog, at egensvingningerne beskrives komplekst, idet der udover en amplitude også skal beskrives en faseforskydning, jvf. (14).

Omskrivningen til normalkoordinater kræver, at egensvingningsformerne beregnes, og de generaliserede masser, stivheder, og dæmpninger beregnes. Disse indledende step er uafhængig af selve belastningen, og den enkelte konstruktion kan efterfølgende let analyseres for forskellige belastningshistorie. En væsentlig forudsætning er også, at systemet ikke ændrer sig, og man vil derfor kun kunne analysere lineære systemer.

Den dynamiske opførelse kan i langt de fleste tilfælde beskrives tilstrækkeligt nøjagtigt ved anvendelse af egensvingningsformerne hørende til de laveste egenfrekvenser. De højfrekvente dele har ingen større indflydelse på konstruktionens respons overfor dynamisk last.

Ligningssystemet i (133) begrænses da til

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\bar{r}_i}{\bar{m}_i} \quad i = 1, \dots, M \quad (134)$$

hvor antallet af indgående egenfrekvenser  $M$  er væsentligt lavere end antallet af frihedsgrader,  $n$ . Hermed reduceres det indledende beregningsarbejde betydeligt uden at nøjagtigheden forringes væsentligt. I (134) er indført den relative dæmpning,  $\zeta_i$ , jvf. (11). Fra (7), (11) og (12) fås

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= \omega_i^2 \bar{m}_i \\ \zeta_i &= \frac{\bar{c}_i}{2\sqrt{\bar{k}_i \bar{m}_i}} = \frac{\bar{c}_i}{2\bar{m}_i \bar{\omega}_i} \end{aligned} \quad (135)$$

Ofte angives dæmpningen direkte ved  $\zeta_i$  i stedet for faktorerne  $\alpha$  og  $\beta$  i Rayleigh dæmpningen. Hermed kan dæmpningsforholdet varieres for de forskellige egensvingningsformer. Modalanalysen bruges både til at beskrive de tvungne svingninger, (13) og transiente påvirkninger, (35) eller (46). Ved de tvungne svingninger beregnes forstærkningsfaktoren (31) og faseforskydningen (34) for hver enkelt egensvingningsform og bidragene superponeres. Den transiente analyse bruger det samme superpositionsprincip, og til tidsintegration af den enkelte differentiaalligning kan benyttes de sædvanlige metoder, f.eks. Newmarks metode (121)-(125).

Ved analysen anvendes normalkoordinaterne direkte, men resultaterne præsenteres bedst i flytningerne direkte, og transformationen er direkte ved hjælp af (126).

Antallet af indgående egensvingningsformer  $M$  influerer på både regnenøjagtighed og tidsforbrug. En god målestok er den nøjagtighed, hvormed den statiske belastning kan bestemmes, dvs. for en belastning med frekvensen 0.

For den transiente analyse er de primære beregningsresultater tidshistorier for flytningerne, men udfra disse kan de tidlige variationer af snitkræfter bestemmes.

# Litteratur

- Bathe, K. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- Clough, R. and Penzien, J. (1975). *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill.
- Damkilde, L. (1990). *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner, F118*, BKM, Lyngby.
- Damkilde, L. (1999). A closed-form solution for a viscous damped sdf system subjected to a ramp load, p. 5.
- Koloušek, V. (1973). *Dynamics in Engineering Structures*, Butterworths.
- Langen, I. and Sigbjörnsson, R. (1979). *Dynamisk analyse av konstruksjoner*, Tapir, Trondheim.
- Meirovitch, L. (1986). *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, Singapore.