

Tværsnitsanalyse

Lars Dankertsen, maj 2008.

Formål

Formålet med tværsnitsanalysen er ud fra snitkræfterne at bestemme påvirkningen i de enkelte dele af tværsnittet. Ud fra påvirkningerne på tværsnittet kan man ud fra oplysninger om materialets styrke afgøre om et givet tværsnit har tilstrækkelige dimensioner.

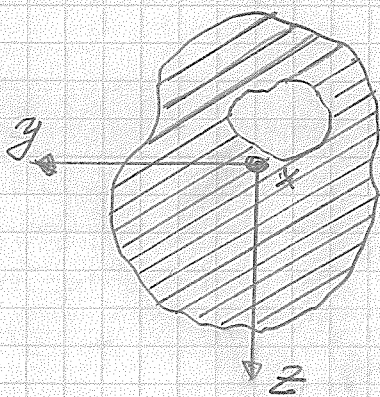
Tværsnitsanalysen indgår også ved bestemmelse af deformationer eller vedbøjninger. Det er en vigtig del ved analyse af statisk ubestemte konstruktioner.

Notatet er opdelt i 4 afsnit:

1. Tværsnitskonstanter
2. Spændinger og tøjninger
3. Normalspændinger fra N og M , Navier
4. Forskydningspændinger fra V , Grashof

1. Tværsnitskonstanter.

Der betragtes et vilkårligt tværsnit som vist i nedenstående figur.



Tværsnittet er indlagt i et koordinatsystem $y-z$, og x -aksen svarer til bjælkeaksen. Orienteringen af y - og z -aksen er som vist, men man skal være opmærksom på, at den kan være anderledes i andet materiale.

Ved tværsnitsanalysen viser det sig, at følgende størrelser har interesse, jvf senere.

- $A = \int_A dA$ Tværsnitsarealet

- Tyngdepunktet for tværsnittet.

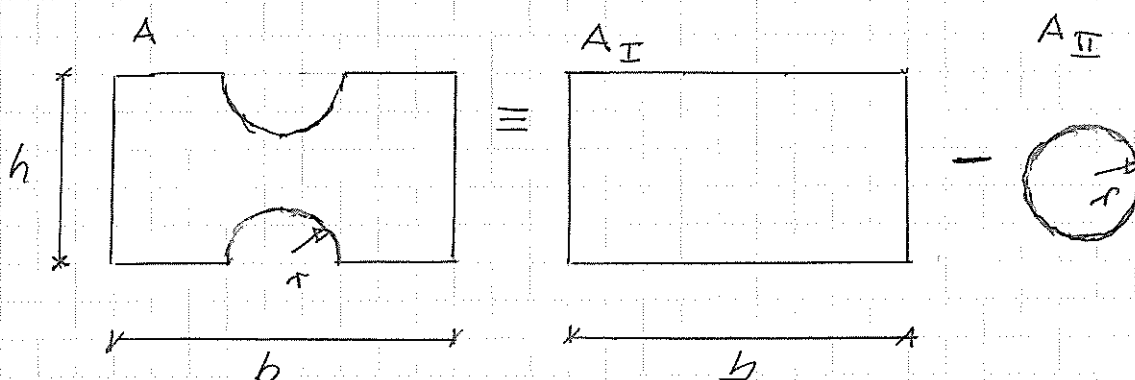
- $I_y = \int_A z^2 dA$ og $I_z = \int_A y^2 dA$

Inertimomenterne om henholdsvis

y og z akser, som er akser igennem tyngdepunktet.

Areal

Aralet kan bestemmes ved at opbygge tværsnittet af kendte grundelementer som illustreret i nedenstående figur.



$$A = A_I - A_{II} = h \cdot b - \pi r^2$$

Tyngdepunkt

Tyngdepunktet er defineret som det punkt, (y_c, z_c) , hvor de statiske momenter om 2 akser, der går gennem tyngdepunktet, er 0.

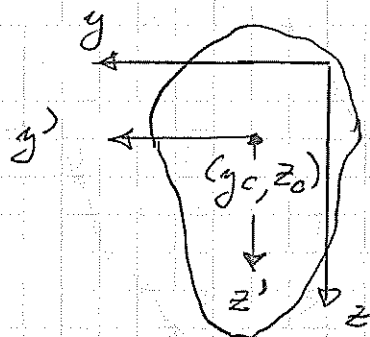
Det statiske moment om y -aksen er defineret ved:

$$S_y = \int_A z \cdot dA$$

Tilsvarende er det statiske moment om z -aksen defineret ved:

$$S_z = \int_A y \cdot dA$$

Ved beregning af tyngdepunktet vælges en y - og z -akse.



Herefter beregnes de statistiske momenter S_y og S_z , givet senere.

Tyngdepunktets koordinater (y_c, z_c) skal bestemmes så $S_{y'} = 0$ og $S_{z'} = 0$.

$$\begin{aligned} S_{y'} &= \int_A z' dA = \int_A (z - z_c) dA \\ &= \int_A z \cdot dA - \int_A z_c dA = S_y - z_c \cdot A = 0 \end{aligned}$$

Det bestemmer.

$$z_c = \frac{S_y}{A}$$

Tilsvarende bestemmes

$$y_c = \frac{S_z}{A}$$

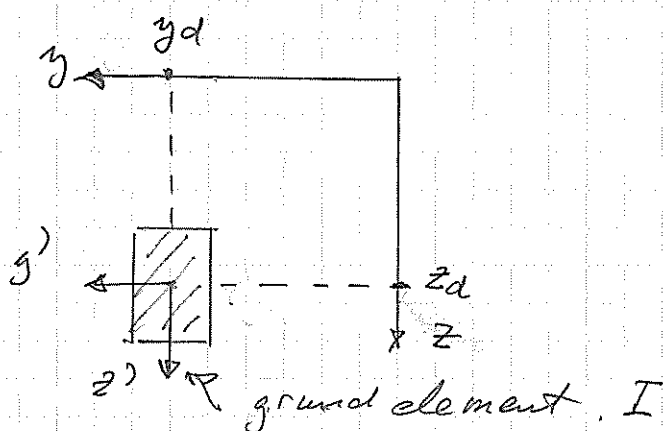
Ved dobbeltsymmetriske tværsnit bestemmes y_c og z_c ved symmetribetraktninger.

Ved enkeltsymmetriske tværsnit bestemmes enten y_c eller z_c ved symmetribetraktninger.

Statiske momenter.

Det statiske moment, S_y eller S_z , kan findes som en sum af bidrag fra enkeltdele ligesom ved bestemmelsen af arealet.

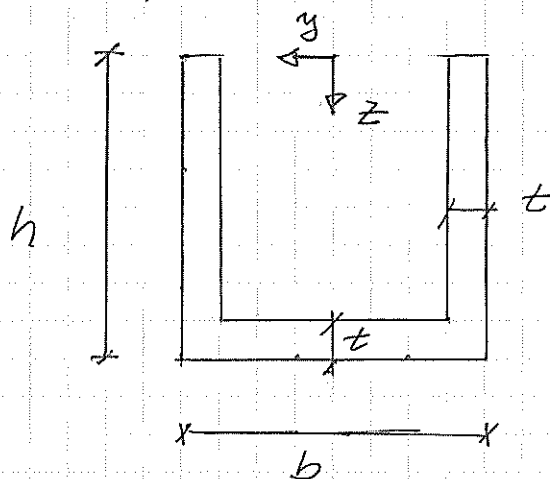
Ved at opdele tværsnittet i enkeltdele som rektangler eller cirkler, kan man nemt finde enkeltbidragene til S_y eller S_z . For grundelementer vil man ud fra f.eks. symmetri egenskaber kende de lokale tyngdepunkts akser.



$$\begin{aligned} S_y^I &= \int_{A_I} z \, dA = \int_{A_I} (z_d + z') \cdot dA \\ &= \int_{A_I} z_d \, dA + \int_{A_I} z' \, dA = z_d \cdot A_I \end{aligned}$$

Tilsvarende findes

$$S_z^I = y_d \cdot A_I$$

Eksempel

af symmetri Grunde
går z gennem
tyngdepunktet,
dvs $y_c = 0$

Træsnittet deles op i et rektangel I med
gave mål $h \cdot b$ minus et rektangel II med
gave mål $h-t$ og $b-2t$.

$$S_y^I = A^I \cdot z_d = b \cdot h \cdot \frac{h}{2}$$

$$S_y^{II} = A^{II} \cdot z_d = (b-2t) \cdot (h-t) \cdot \frac{h-t}{2}$$

$$S_y = S_y^I - S_y^{II}$$

$$A = A^I - A^{II} = h \cdot b - (h-t) \cdot (b-2t)$$

$$z_c = \frac{S_y}{A}$$

For $b=h$ og $t = \frac{1}{10}h$ findes:

$$S_y^I = \frac{1}{2}h^3, \quad S_y^{II} = \frac{1}{2} \cdot 0.8 \cdot 0.9^2 h^3 = \frac{1}{2} \cdot 0.648h^3$$

$$A = h^2 - 0.9 \cdot 0.8 h^2 = 0.28h^2$$

$$z_c = \frac{\frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{2} \cdot 0.648h^3}{0.28h^2} = 0.629h$$

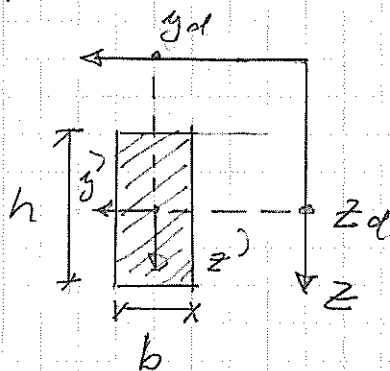
Tyngdepunktet er tættest på den nedre
kant.

Inertimomenter

Inertimomenter kan tilsvarende som arealer og statiske momenter findes som en sum af delbidrag.

For at kunne bruge det princip forudsættes kendskab til nogle løsninger for delelementer. I denne sammenhæng opstilles kun løsningen for et rektangel, men tilsvarende løsninger for cirkler og trekanter kan bestemmes.

Der betragtes et rektangel som vist nedenfor.



(y_d, z_d) er koordinater for tyngdepunktet af rektangleret.

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z' + z_d)^2 dA \\
 &= \int_A z'^2 dA + 2 \cdot z_d \int_A z' dA + z_d^2 \int_A dA \\
 &= \int_A z'^2 dA + z_d^2 A = I_{y'} + z_d^2 A
 \end{aligned}$$

Inertimomentet for rektangleret findes altså som en sum af inertimomentet om den lokale tyngdepunktsakse plus et flytningsbidrag $z_d^2 A$, der altid er positivt.

Heretter bestemmes $I_{y'}$

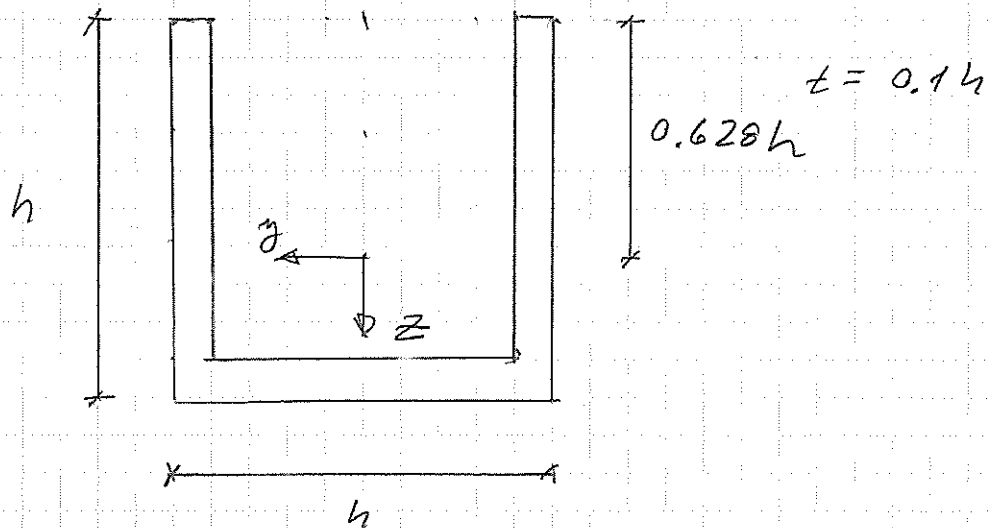
$$I_{y'} = \int_A z'^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z'^2 \left(\int_{y_d - \frac{b}{2}}^{y_d + \frac{b}{2}} dy \right) dz' \\ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z'^2 \cdot b dz' = \frac{1}{12} h^3 \cdot b$$

Tilsvarende finnes I_z

$$I_z = I_{z'} + A \cdot y_d^2 = \frac{1}{12} b^3 \cdot h + h \cdot b \cdot y_d^2$$

Eksempel

Fra tidligere eksempel fås



$$I_y = I_y^I - I_y^{II}$$

$$I_y^I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + b \cdot h \cdot (0.628 \cdot h - 0.5h)^2 \\ = 0.099717 h^4$$

$$I_y^{II} = \frac{1}{12} \cdot 0.8 \cdot h \cdot (0.9h)^3 + 0.8h \cdot 0.9h \cdot (0.628h - 0.45h)^2 \\ = 0.071412 h^4$$

$$I_y = 0.02830 h^4$$

Det kan være vanskeligt umiddelbart at vurdere størrelsen af I_y , men ved at udregne den såkaldte inertiradius i_y er det nemmere

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow I_y = i_y^2 A$$

Inertiradius udtrykker den afstand som tværsnittet i "gennemsnit" ligger fra tyngdepunktsaksen. De dele længst fra tæller mere end dele tættere på, så derfor sættes gennemsnit i gæseøjne.

I eksemplet findes

$$i_y = \sqrt{\frac{0,0283 h^4}{0,28 h^2}} = 0,318 h.$$

Dette ser rimeligt ud.

Eksempel fortsat

Inertimomentet om z-akser findes tilsvarende som:

$$\begin{aligned} I_z &= I_z^I - I_z^{II} = \frac{1}{12} h^3 \cdot h - \frac{1}{12} (0,8h)^3 \cdot 0,9h \\ &= 0,0449 h^4 \end{aligned}$$

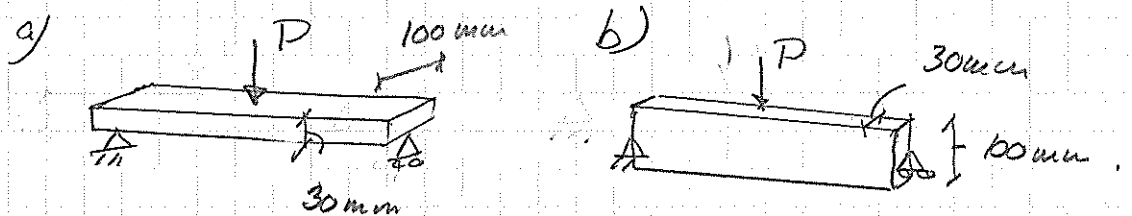
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 0,4006 h$$

Dette ser rimeligt ud.

Da $I_y > I_z$, betegnes y -aksen som den stærke akse og z -aksen som den svage akse.

Senere vil det vise sig, at påvirkes tværsnittet med det samme bøjningsmoment om henholdsvis y - og z -aksen, vil bøjning om stærke akse give de mindste påvirkninger.

Nedenfor er princippet illustreret.



1 b) udnyttes tværsnittet meget bedre.

$$I_y^{a)} = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 30^3 \text{ mm}^4$$

$$I_y^{b)} = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 100^3 \text{ mm}^4$$

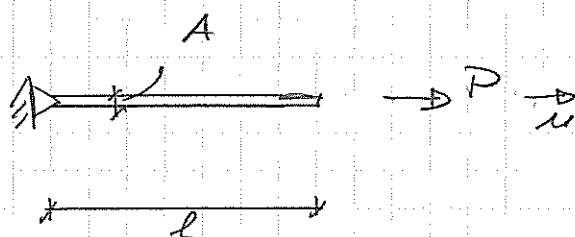
Forskellen i inertimomenter er

$$\frac{I_y^{b)}}{I_y^{a)}} = \frac{100^2}{30^2} \approx 11$$

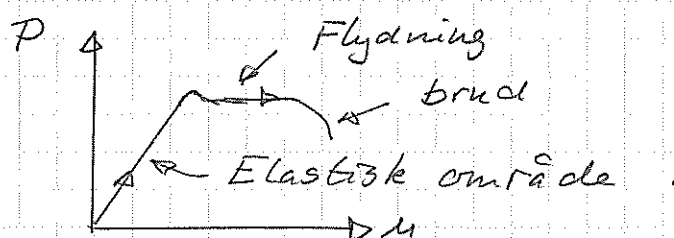
Forskellen i påvirkninger er dog kun $100/30 \approx 3,3$, se senere.

2. Spændinger og Tøjninger.

For at undersøge styrken og stivheden af materialer kan man udføre trækforsøg, hvor en stang af materialet udsættes for en kraft P . Forlængelse af emnet kaldes u .



P og u kan afbildes i et diagram, og for blødt stål vil man typisk få en kurve som vist nedenfor.



I det elastiske område vil man ved aflastning ikke finde blivende deformationer. Andre materialer, der er mere sprøde f.eks. træ, vil ikke have et område med flydning men bryde direkte.

Det ovenstående diagram vil afhænge af arealet og længden af prøven. For at gøre afbildningen uafhængig af prøveemnet indføres spændingen og tøjningen som:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

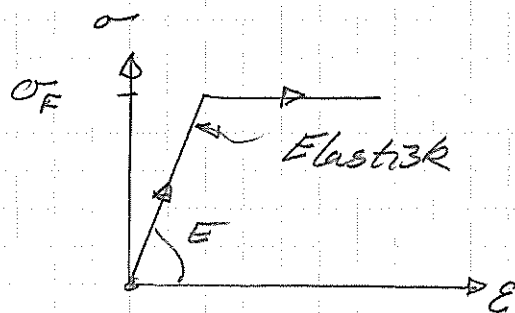
$$\varepsilon = \frac{u}{l}$$

Det græske bogstav σ (sigma) står for spændingen, som svarer til at kræften P er fordelt jævnt ud over arealet. Enheden for σ er N/mm^2 eller MPa.

Ståls flydespænding vil for en normal stål kvalitet være ca 200 MPa, mens den for træ af god kvalitet er omkring 30 MPa.

Det græske bogstav ε (epsilon) står for tøjningen der er en relativ længdeforlængelse. Tøjningen er dimensionsløs, og vil typiske være ret små. En spænding på 200 MPa vil for stål give en tøjning på ca 1‰.

Ved at afbilde et trækforsøg i et ε - σ diagram fås:



Kurven er lidt forenklet, og flydning indtræder ved σ_F . Her er vi kun interesseret i det elastiske område.

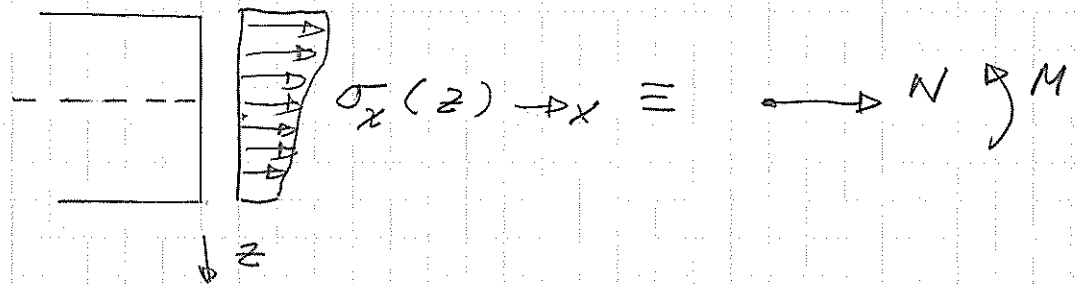
I det elastiske område gælder

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

hvor E er elasticitetsmodulen. For stål er den ca $2,1 \cdot 10^5$ MPa. Sammenhængen kaldes Hookes lov.

Spændinger på et tværsnit.

Udsættes et tværsnit for bøjning og normalkræfter vil der i tværsnittet komme normalspændinger som vist.



For at opfylde ligevægt må:

$$N = \int_A \sigma_x(z) dA \text{ og}$$

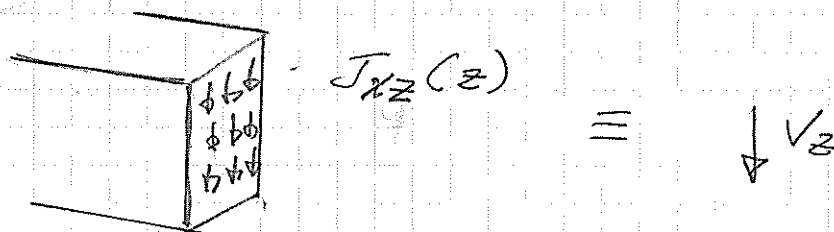
$$M = \int_A z \cdot \sigma_x(z) \cdot dA$$

I det følgende afsnit vil fordelingen af $\sigma_x(z)$ blive bestemt.

Indeks x på σ_x angiver, at spændingen er rettet langs bjælkeaksen x .

Spændinger måles normalt positivt som træk.

Udsættes et tværsnit for forskydning vil der i tværsnittet komme spændinger, der i modsætning til normalspændingerne virker parallelt med tværsnittet. som vist nedenfor



For at opfylde ligevægt må

$$V_z = \int_A J_{xz}(y, z) dA.$$

De såkaldte forskydningspændinger J kan også virke i y -retningen.

Da der ikke er forskydningskraft i y -retningen gælder.

$$0 = \int_A J_{xy}(y, z) dA$$

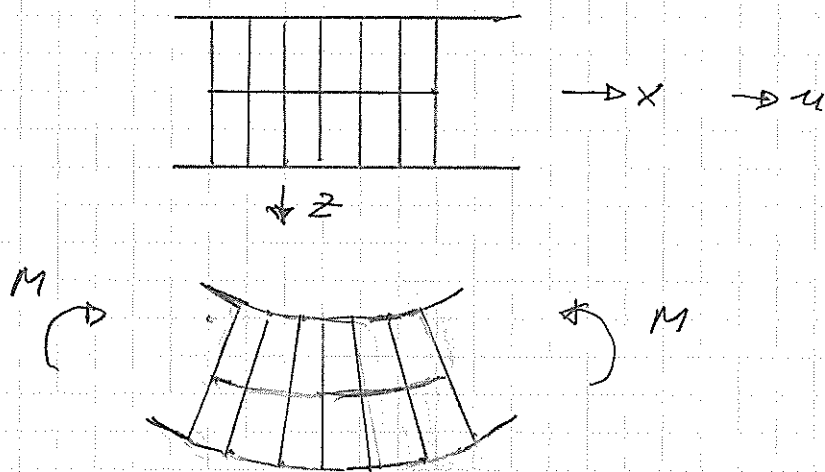
Man skal være opmærksom på at ovenstående betingelse ikke er det samme som

$$J_{xy} = 0.$$

I et kommende afsnit vil fordelingen af forskydningspændinger over tværsnittet blive bestemt.

3. Normalspændinger fra Nog M, Navier.

Eksperimentelt kan man vise, at bjælketværsnittet forbliver plant, når det påvirkes af et bøjningsmoment eller en normalkraft. Det er illustreret i nedenstående figur.



De vandrette flytninger u over tværsnittet kan derfor som en god tilnærmelse skrives som:

$$u(y, z) = a + b \cdot z$$

hvor a og b kun kan afhænge af x . Altså at flytningen af tværsnittet vil afhænge af hvor tværsnittet er placeret.

Tøjningen over tværsnittet vil derfor også afhænge lineært af z .

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot z$$

Normalspændingerne findes v.h.a. Hookes lov som:

$$\sigma(y, z) = E \cdot \varepsilon(y, z) = E \cdot \varepsilon_0 + E \cdot \varepsilon_1 \cdot z$$

Ved hjælp af ligevægts ligningerne findes ε_0 og ε_1 .

$$N = \int_A \sigma(y, z) \, dA = E \cdot \varepsilon_0 \cdot A + E \cdot \varepsilon_1 \int_A z \, dA$$

Det sidste led er 0, da y -aksen er en tyngdepunkts akse.

$$N = E \cdot \varepsilon_0 \cdot A \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{EA} \quad \text{og} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

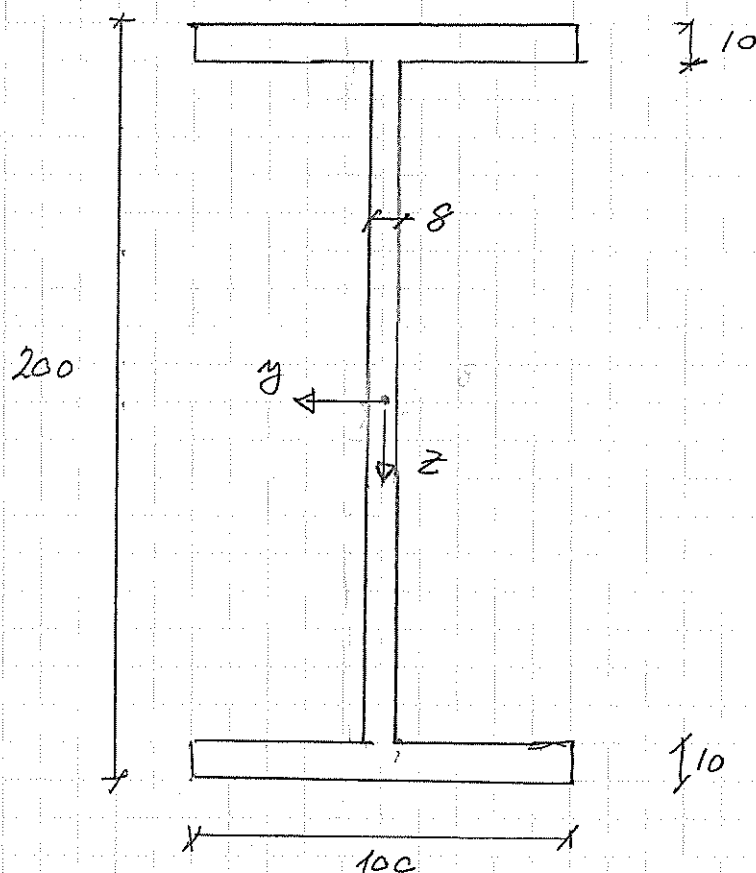
$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma(y, z) \cdot z \cdot dA = E \cdot \varepsilon_0 \int_A z \, dA + E \cdot \varepsilon_1 \int_A z^2 \, dA \\ &= E \cdot \varepsilon_1 \cdot I_y \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{M}{E \cdot I_y} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot z = \frac{M}{E I_y} \cdot z \quad \text{og} \quad \sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z$$

Hermed kan Naviers formel opstilles

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} z$$

Normalspændingen er lineært fordelt over tværsnittet. Normalkraften giver et konstant bidrag, og bøjningsmomentet giver numerisk den største spænding i de yderste fibre.

Eksempel

alle mål i mm

Opfatter tværsnittet som et stort rektangel minus et indre

$$A = 100 \cdot 200 - 180 \cdot 92 = 3440 \text{ mm}^2$$

Tyngdepunkt bestemmes ud fra symmetri.

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3 - \frac{1}{12} \cdot 92 \cdot 180^3 = 21,955 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 79,9 \text{ mm} \quad \text{Ser rimeligt ud.}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot (10+10) \cdot 100^3 + \frac{1}{12} \cdot (200-10-10) \cdot 8^3 = 1,674 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 22,1 \text{ mm} \quad \text{Ser rimeligt ud.}$$

Trærsnittet påvirkes af.

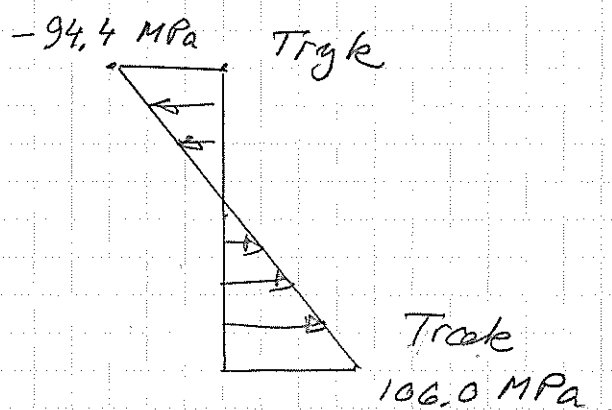
$$N = 20 \text{ kN} \quad \text{og} \quad M_y = 2.2 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} z = 5.8 \text{ MPa} + 1.002 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot z$$

I oversiden er $z = -100$ og $\sigma = -94.4 \text{ MPa}$

I undersiden er $z = 100$ og $\sigma = 106.0 \text{ MPa}$.

Fordelingen optegnes



Til brug ved dimensionering benyttes ofte modstandsmomentet W_y

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{21.955 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{100 \text{ mm}} = 21.955 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

For givet moment og givet σ_F kan det nødvendige modstandsmoment findes,

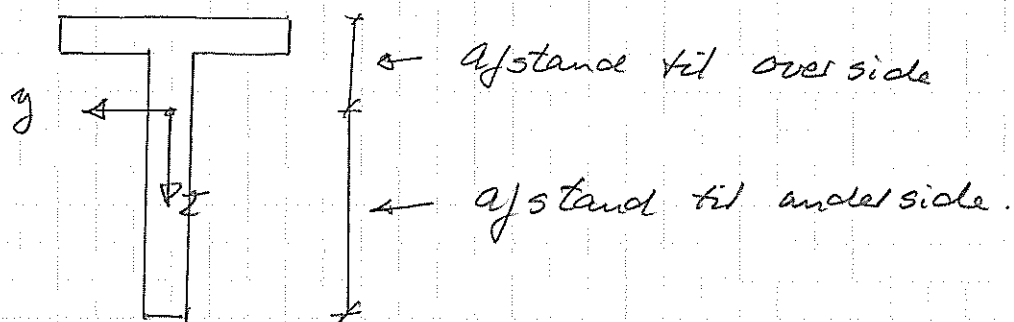
$$W_y > \frac{M}{\sigma_F}$$

Man kan også finde det størst tilladte moment som

$$M_F = W_y \cdot \sigma_F$$

Ved bøjning om z -aksen kan man udlede tilsvarende udtryk for W_z .

Ved asymmetriske tværsnit som vist nedenfor er der to forskellige modstands momenter afhængigt af om over- eller undersiden betragtes.



Hvis der er bøjningsmomenter om begge akser findes σ ved superposition. Naviers formel bliver:

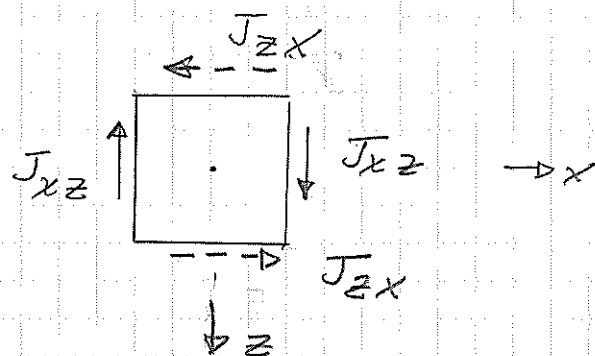
$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Bemærk at fortegnet på de 2 bidrag har forskelligt fortegn.

De største normalspændinger findes i tværsnittets yderpunkter. Spændingsfordelingen er stadig plan.

4. Forskydnings spændinger fra V, Grashof

Forskydnings spændinger er mere komplekse end normal spændinger fordi de virker på 2 forskellige snit samtidig. Der betragtes et lille element $dx dy$ udsat for ren forskydnings spænding J_{xz} som vist i nedenstående figur

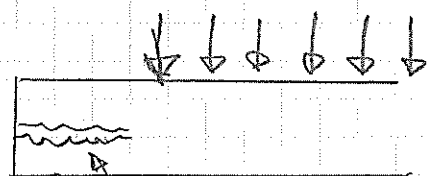


For at lodret ligevægt skal være opfyldt, skal forskydnings spændingen være lige stor og modsatrettet på den anden (aktion - reaktion). For at undgå at elementet roterer må der virke forskydnings spændinger på z -snittet. Ved moment ligevægt findes.

$$J_{xz} = J_{zx}.$$

Ved bestemmelsen af J_{xy} og J_{xz} vil man i stedet bestemme J_{yx} og J_{zx} . D.v.s. de forskydnings spændinger der går i bjælkeaksens retning.

Ved eksperimentelle undersøgelser vil man også se, at de fleste bjælker der brydes ved forskydning rent faktisk revnes i langsgående retning.



Forskydningsbrud.

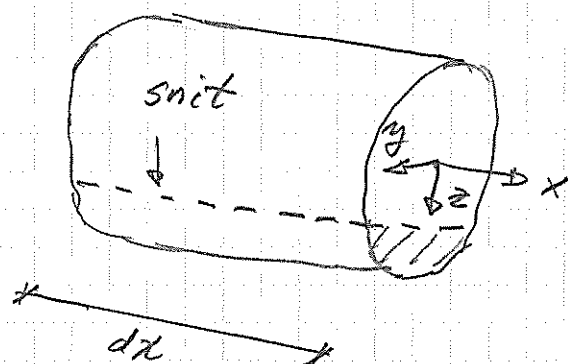
Forskydningsbrud vil kun i sjældnere tilfælde optræde som brud i kraftens retning, men ved boltensamlings overklipning eller forskydningsbrud i bolte forekomme.

Forskydningskræfter kommer af ændringer i bøjningsmomentet, og fra bjælkestætker vides

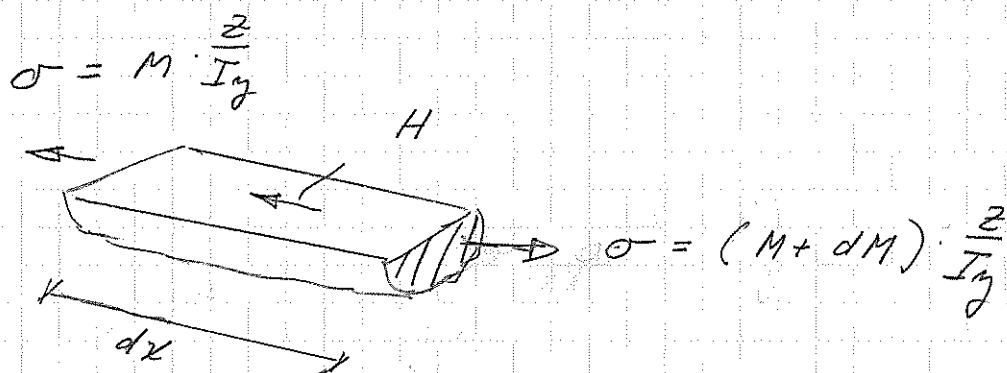
$$V = \frac{dM}{dx}$$

Grashof har opstillet en formel til at bestemme den såkaldte forskydningskraft i et snit.

Udgangspunktet er at snitte en del af bjælken ud som vist i nedenstående figur.



I det vandrette snit virker der en forskydende kraft H , og den skal holde ligevægt med de ændringer der er i normalspændingen på de 2 snit x og $x+dx$, som vist i nedenstående figur.



H er en kraft per længde.

Ligevægt giver:

$$H \cdot dx = \int_{\text{del}} dM \cdot \frac{z}{I_y} \cdot dA \quad \Rightarrow$$

$$H = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{I_y} \cdot \int_{\text{del}} z \, dA = \frac{V_z}{I_y} S_{\text{del}}$$

hvor S_{del} er det statiske moment af den skraverede del af tværsnittet.

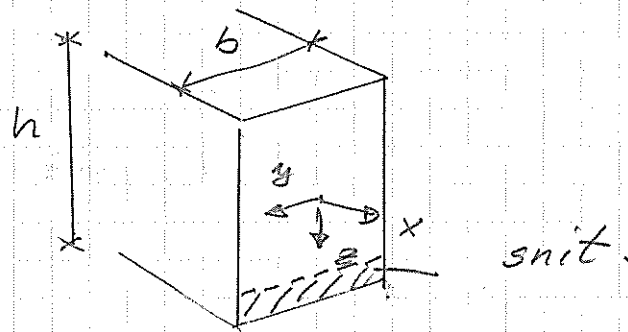
Den forskydende kraft kan efterfølgende antages jævnt fordelt over snittet, således at

$$J_{zx} = \frac{H}{t_{\text{snit}}}.$$

Antagelsen om jævn fordeling gælder bedst, hvis snit længden er lille i forhold til øvrige tværsnitsdimensioner.

Eksempel

Der betragtes et rektangulært profil som vist nedenfor.



$$I_z = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Det statiske moment af snittet er

$$S_{\text{snit}} = b \cdot (h/2 - z) \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) \right)$$

↑
Højde af snit

↑
afstand fra y-akse
til tyngdepunkt.

Ved udregning findes

$$S_{\text{snit}} = b \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$$

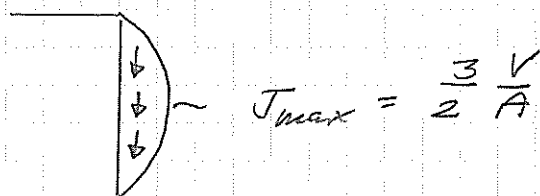
$$H = \frac{V_z}{\frac{1}{12} b \cdot h^3} \left[\frac{1}{2} b \cdot \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{V_z}{b \cdot h} \left(1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right)$$

Den maksimale forskydningspænding findes for $z=0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A}$$

Den maksimale forskydningspænding bliver altså 50% større end den gennemsnitlige forskydningspænding over tværsnittet.

Fordelingen er parabolisk som vist nedenfor.

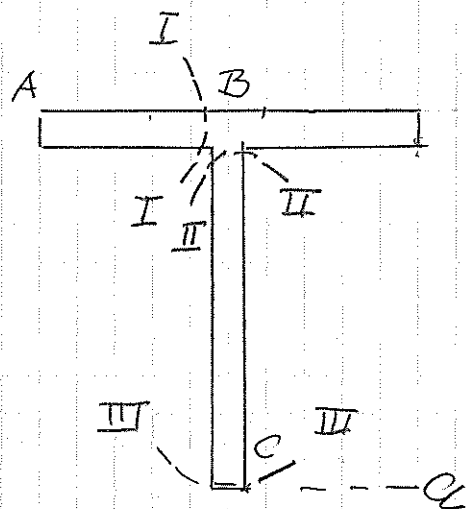


Eksempel

Ved I-profiler vil man se, at der kommer forskydningspændinger i begge retninger. I flangerne vil retningen være vinkelret på forskydningskraftens retning.

Der tages udgangspunkt i eksemplet fra forrige afsnit.

Der undersøges 3 snit som vist på nedenstående figurer.



Fra A til B vil det statiske moment stige lineært, så det er tilstrækkeligt at bestemme det i B.

$$S_{I-I} = \underbrace{46 \cdot 10}_{\text{areal}} \cdot \underbrace{95}_{\text{afstand}} = 43200 \text{ mm}^3$$

$$H = \frac{V}{I_y} \cdot S_{I-I}$$

$$\tau_{I-I} = \frac{H}{t} = \frac{V}{I_y \cdot t} \cdot S_{I-I} \quad \text{hvor } t = 10 \text{ mm.}$$

For at gøre resultatet nemmere at sammenligne, normeres på arealet af kroppen.

$$A_k = 180 \cdot 8 = 1440 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{I-I} = \frac{V}{A_k} \cdot \frac{A_k}{I_y \cdot t} \cdot S_{I-I} = \frac{V}{A_k} \cdot 0.287$$

Forskydningsspændingen vil være i y-retningens retning, idet snittet står vinkelret på y-aksen.

$$S_{II-II} = 100 \cdot 10 \cdot 95 = 95000 \text{ mm}^3$$

$$J_{II-II} = \frac{H}{t} = \frac{V}{I_y t} \cdot S_{II-II}, \text{ hvor } t = 8 \text{ mm}$$

$$J_{II-II} = \frac{V}{A_k} \cdot \frac{A_k}{I_y \cdot t} \cdot S_{II-II} = \frac{V}{A_k} \cdot 0.779$$

Forskydningsspændingen vil være i z -retningens retning, idet snittet står vinkelret på y -aksen.

$$S_{III-III} = S_{II-II} + 8 \cdot 90 \cdot 45 = 127400 \text{ mm}^3$$

$$J_{III-III} = \frac{V}{A_k} \cdot \frac{A_k}{I_y \cdot t} \cdot S_{III-III} = \frac{V}{A_k} \cdot 1.045$$

Ofter tilnærmes den maksimale forskydnings-spænding til $\frac{V}{A_k}$, og som man ser er afvigelsen lille

For fordelingen af forskydnings-spændinger er vist i nedenstående tegning.

