

Bjælker på elastisk underlag

Lars Damkilde

Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer
Danmarks Tekniske Universitet
DK-2800 Lyngby

Februar 1998

Resumé

Rapporten omhandler beregning af bjælker på elastisk underlag. Indledningsvis optilles den styrende differentiaalligning, og der udledes de kendte løsninger for henholdsvis enkeltkraft og moment på en uendelig bjælke. Der vises nogle eksempler på anvendelse af bjælker på elastisk underlag i forbindelse med beregning af bygningskonstruktioner. Herefter udledes løsninger for bjælker af endelig længde udsat for påvirkninger i endepunkterne. Disse løsninger kan anvendes i forbindelse med elementmetodeberegninger af bjælkekonstruktioner, og der udvikles både eksakte og tilnærmede løsninger.

Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset 59422, Edb-metoder for rammekonstruktioner. Formålet er at give en kort introduktion til den bagvedliggende teori samt at vise nogle kendte klassiske løsninger og eksempler på anvendelser. Der anvises endvidere, hvorledes det elastiske underlag kan medtages i en elementmetodeformulering enten på basis af den eksakte løsning for en endelig bjælke eller v.h.a. tilnærmede formfunktioner.

Lyngby, Februar 1998

Lars Damkilde

Bjælker på elastisk underlag

I forbindelse med modellering af bærende konstruktioners opførsel kan det være fordelagtigt at kende til begrebet "Bjælker på elastisk underlag". Som eksempler på anvendelser kan nævnes stabilitetsberegninger for tyndvæggede bjælker, beregning af rotationssymmetriske skaller og geoteknisk analyse af tværbelastede pæle. En grundlæggende beskrivelse af emnet kan findes i [1].

Matematisk model

Der betragtes en bjælke med konstant EI , og som understøttes på et lag, der yder modstand proportionalt med bjælkens udbøjning.

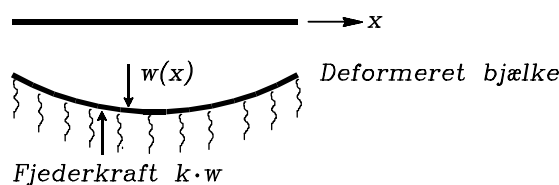


Fig. 1: Bjælke på elastisk underlag

Underlagets modstand mod deformation beskrives ved fjederkonstanten, k , der har enheden N/m^2 . Det bemærkes, at modstanden mod bevægelse gælder for bevægelser af bjælken i begge retninger. I modellen medtages kun modstand mod bevægelse vinkelret på bjælkeaksen, men der kan også opstilles modeller for modstand mod bevægelser i aksial retning. Fjederkonstanten antages konstant uafhængig af tværflytninger $w(x)$. I modsat fald ville der være tale om et ikke-lineært problem.

Den styrende differentiaalligning for problemet fås ved at betragte en infinitesimal del af bjælken, som vist i Figur 2. Udbøjningerne antages små, og forskydningstøjningerne regnes for ubetydelige. Der betragtes en plan bjælke med bøjningsmoment M og forskydningskraft V .

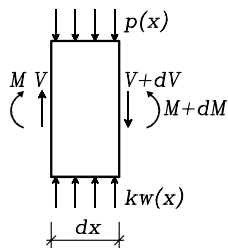


Fig. 2: Kræfter på bjælkeudsnit

Lodret projektion giver

$$V - (V + dV) + kw(x)dx - p(x)dx = 0 \quad (1)$$

hvilket medfører

$$\frac{dV}{dx} = kw(x) - p(x) \quad (2)$$

Fjederkonstanten k antages for enkelthedens skyld uafhængig af x .

Momentligevægten giver det velkendte resultat fra den tekniske bjælketeori

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (3)$$

Bjælkematerialet antages lineært-elastisk, og dermed er den konstitutive lov

$$\frac{M}{EI} = -w_{,xx} \quad (4)$$

hvor $w_{,xx}$ betyder w differentieret 2 gange med hensyn til x .

Ved at indsætte (3) og (4) i (2) findes den styrende differentialligning som

$$EIw_{,xxxx} = p(x) - kw \quad (5)$$

For $k = 0$ giver (5) den sædvanlige ligning fra den tekniske bjælketeori.

Løsninger for uendelig bjælker

I dette afsnit opstilles løsninger for en uendelig lang bjælke påvirket af enten en enkeltkraft eller moment i $x = 0$. Disse specialtilfælde viser nogle karakteristika ved bjælker på elastisk underlag.

I differentialligningen bortfalder leddet med den fordelte last p , og samtidig gøres differentialligningen dimensionsløs ved indførelse af λ .

$$w_{,xxxx} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (6)$$

hvor $1/\lambda$ er en karakteristisk længde. Parameteren λ er defineret ved

$$\lambda = \left(\frac{k}{4EI} \right)^{1/4} \quad (7)$$

Den karakteristiske længde angiver en typisk bølgelængde i løsningen.

Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning skrives som:

$$w(x) = e^{\lambda x} [c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x] + e^{-\lambda x} [c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x] \quad (8)$$

Tilfældet med en enkeltkraft P i $x = 0$ som vist i Figur 3 ønskes løst.

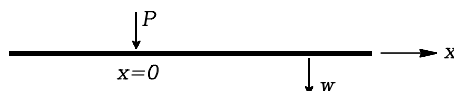


Fig. 3: Enkeltkraft på uendelig bjælke

De fire arbitrære konstanter c_1 , c_2 , c_3 og c_4 skal bestemmes ud fra randbetingelserne. Løsningen skal være begrænset for $x \rightarrow \pm\infty$, og det betyder, at faktoren til $e^{\lambda x}$ skal være 0. Det kan kun opfyldes for $c_1 = c_2 = 0$. Løsningen skal være symmetrisk om $x = 0$, hvilket giver

$$w_{,x}(0) = 0 \quad (9)$$

Ved differentation af (8) findes at $c_3 = c_4 = c$ for at (9) er opfyldt.

Den sidste konstant bestemmes således, at summen af fjederkræfterne svarer til P .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P &= \int_0^\infty kwdx = kc \int_0^\infty e^{-\lambda x} [\cos \lambda x + \sin \lambda x] dx \\ &= \frac{kc}{\lambda} [-e^{-\lambda x} \cos \lambda x]_0^\infty = \frac{kc}{\lambda} \end{aligned} \quad (10)$$

Løsningen for en enkeltkraft på en uendelig bjælke bliver hermed.

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-\lambda x} [\cos \lambda x + \sin \lambda x] \quad (11)$$

Dette svarer til en dæmpet svingning, hvor bjælken får både positive og negative tværflytninger. Dette karakteristisk oscillerende forløb er f.eks. også karakteristiske ved skalproblemer. Moment og forskydningskraft findes ved differentation, og de har det samme karakteristiske forløb, idet der dog for $x = 0$ er knæk i momentkurven og spring i forskydningskraften.

For $x > 0$ findes

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x} [\cos \lambda x - \sin \lambda x] \\ V(x) &= -\frac{P}{2} e^{-\lambda x} \cos \lambda x \end{aligned} \quad (12)$$

Løsningen for et moment M i $x = 0$ findes ved hjælp af ovenstående løsning.

Momentet opfattes som et kraftpar, som vist i Figur 4.

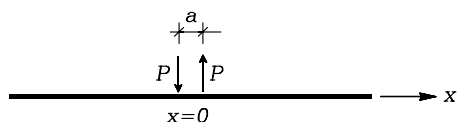


Fig. 4: Moment på uendelig bjælke

Momentet M er givet ved Pa . Løsningen findes ved superposition af løsningen fra (11).

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2k} (f(x - a/2) - f(x + a/2)) \quad (13)$$

hvor

$$f(x) = e^{-\lambda x} [\cos \lambda x + \sin \lambda x] \quad (14)$$

Idet $M = Pa$ skrives (13) som

$$w(x) = \frac{M\lambda}{2k} \frac{f(x + a/2) - f(x - a/2)}{a} \quad (15)$$

Det sidste led svarer til den afledede af f med hensyn til x , og man får

$$w(x) = \frac{M\lambda^2}{k} e^{-\lambda x} \sin \lambda x \quad (16)$$

Det principielle forløb er som ved enkeltkraften. Parameteren λ beskriver afklingningens forløb.

Anvendelser

Nedenfor er kort beskrevet 3 typiske anvendelser.

I forbindelse med stabilitetsundersøgelser af tyndvæggede I-bjælker anvendes i den nye EuroCode for stål (EC3) en model baseret på bjælker på elastisk underlag.

Der betragtes en I-bjælke, hvis øvre flange tænkes fastholdt af en tagbeklædning. Belastningen er opadrettet (vind), og dette giver tryk i den nedre flange. Den trykkede flange vil pga. trykspændingerne forsøge at bøje ud på tværs. Kroppen i I-bjælken modvirker denne bevægelse svarende til et elastisk underlag.

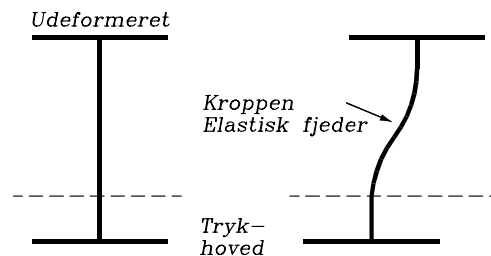


Fig. 5: Stabilitetssvigt i I-bjælke

I stabilitetsberegningen inddrages det elastiske underlag, jvf. afsnit om elementmetodeberegning. Et karakteristisk træk er, at stabilitetssvigtet vil have flere knudepunkter. Jo større relativ stivhed det elastiske underlag har, jo flere knudepunkter (jvf. parameteren λ).

Som eksempel på en rotationssymmetrisk skal betragtes en cylinderskal, som vist i Figur 6.

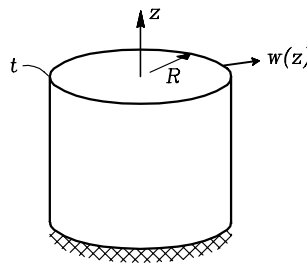


Fig. 6: Cylinderskal

Materialet er isotropt med Youngs modulus E og Poisson's forhold ν . Tværflytningen $w(z)$ medfører en tangentiell tøjning giver ved

$$\epsilon_\theta = w(z) \frac{1}{R} \quad (17)$$

Denne tøjning giver en normalkraft i tangentiell retning givet ved

$$N_\theta = Et\epsilon_\theta = Et\frac{1}{R}w(z) \quad (18)$$

Denne normalkraft svarer til et hydrostatisk tryk langs periferien givet ved

$$n(z) = \frac{N_\theta}{R} = \frac{Et}{R^2}w(z) \quad (19)$$

Bøjning i skallen er givet ved

$$M = -EIw_{,zz}(z) \quad (20)$$

hvor M er bøjningsmomentet i skallen, og $EI = E\frac{1}{1-\nu^2}\frac{1}{12}t^3$.

Den styrende differentialligning kan beskrives ved

$$EIw_{,zzzz}(z) = p(z) - n(z) \quad (21)$$

hvor $p(z)$ er den ydre belastning på skallen. Belastningen hidrørende fra normalkræfterne i skallen forsøger at forhindre tværflytning.

Den karakteristiske parameter λ for skalproblemet findes ved hjælp af (7) til:

$$\lambda = \left(\frac{\frac{Et}{R^2}}{4\frac{E}{1-\nu^2}\frac{t^3}{12}} \right)^{1/4} = \left(3(1-\nu^2) \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{Rt}} \quad (22)$$

Forløbet af bøjningsmomenterne i skalkonstruktioner har det samme oscillerende forløb som løsninger for de uendelige bjælker på elastisk underlag.

For tværbelastede pæle i jord anvendes ballasttallet som et udtryk for modstanden fra jorden. Ballasttallet antages uafhængigt af pælens bredde, og svarer derfor direkte til faktoren k i ligning (5). Ballasttallet vil afhænge af jordens konsolidering, og vil derfor stige med dybden. Ved beregning vil komplikationen så være, at k ikke længere kan regnes konstant.

Bjælke med endelig længde

I dette afsnit opstilles løsninger for bjælker af endelig længde. Belastningen virker alene i bjælkens endepunkter som vist i Figur 7.

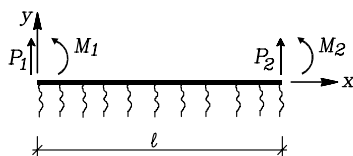


Fig. 7: Bjælke af endelig længde

Den homogene løsning til differentialligningen fra (6) kan skrives som

$$w(x) = c_1 \sinh \lambda x \sin \lambda x + c_2 \sinh \lambda x \cos \lambda x + c_3 \cosh \lambda x \sin \lambda x + c_4 \cosh \lambda x \cos \lambda x \quad (23)$$

Løsningen svarer i princippet til (8), men formuleringen her er mere egnet til de følgende beregninger.

Elementarløsninger til en drejning eller flytning af det ene endepunkt samtidig med at de øvrige flytninger/drejninger holder fast bestemmes i det følgende.

1. Elementartilfælde

$$\begin{aligned} w(0) &= -1 & w'(0) &= 0 \\ w(\ell) &= 0 & w'(\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Ud fra disse 4 randbetingelser kan de arbitrære konstanter, c_1 , c_2 , c_3 og c_4 i formel (23) bestemmes. I beregningerne indføres følgende forkortelser:

$$\begin{aligned} s &= \sin \lambda \ell & s_* &= \sinh \lambda \ell \\ c &= \cos \lambda \ell & c_* &= \cosh \lambda \ell \end{aligned} \tag{25}$$

Efter nogle beregninger findes

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -\frac{1}{s^2 - s_*^2} \left[(s^2 + s_*^2) \sinh \lambda x \sin \lambda x + (sc + s_*c_*) \sinh \lambda x \cos \lambda x \right. \\ &\quad \left. - (sc + s_*c_*) \cosh \lambda x \sin \lambda x + (s^2 - s_*^2) \cosh \lambda x \cos \lambda x \right] \end{aligned} \tag{26}$$

2. Elementartilfælde

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & w'(0) &= -1 \\ w(\ell) &= 0 & w'(\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Svarende til 1. elementartilfælde bestemmes de arbitrære konstanter, og efter nogen regning findes:

$$\begin{aligned} w_2(x) &= \frac{1}{\lambda} \frac{1}{s^2 - s_*^2} \left[(sc - s_*c_*) \sinh \lambda x \sin \lambda x + \right. \\ &\quad \left. s^2 \sinh \lambda x \cos \lambda x + s_*^2 \cosh \lambda x \sin \lambda x \right] \end{aligned} \tag{28}$$

De 2 øvrige elementartilfælde kan fås ved symmetribetragtninger eller ved direkte beregning.

Ud fra flytningsfeltet kan snitkræfterne bestemmes ved passende differentiation. Hermed kan opstilles en stivhedsmatrix, der giver sammenhængen mellem knudekræfter og knudeflytninger.

Efter nogle beregninger findes:

$$f \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

hvor

$$\begin{aligned} k_{11} &= 4(\lambda\ell)^2(s_\star c_\star + sc) = k_{33} \\ k_{22} &= 2\ell^2(s_\star c_\star - sc) = k_{44} \\ k_{12} &= 2\ell(\lambda\ell)(s_\star^2 + s^2) = -k_{34} \\ k_{13} &= -4(\lambda\ell)^2(sc_\star + s_\star c) \\ k_{14} &= 4\ell(\lambda\ell)ss_\star = -k_{23} \\ k_{24} &= 2\ell^2(sc_\star - s_\star c) \\ f &= \lambda \frac{EI}{\ell^2} \frac{1}{s_\star^2 - s^2} \end{aligned} \quad (30)$$

En stiftlegemebevægelse vil for dette element føre til knudekræfter, idet det elastiske underlag får deformationer.

Af hensyn til den senere elementmetodeformulering ud fra tilnærmede formfunktioner laves en rækkeudvikling af stivhedsmatricen (29). Rækkeudviklingen udføres på parameteren $(\lambda\ell)$. Efter en del regning findes

$$\left(\mathbf{K}^{\text{beam}} + k \mathbf{K}^{\text{layer}} \right) \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (31)$$

hvor \mathbf{K}^{beam} er den sædvanlige stivhedsmatrix for et bjælkeelement, og $\mathbf{K}^{\text{layer}}$ er bidraget fra det elastiske lag. Ved at vælge bjælkeelementets længde passende lille kan den tilnærmede løsning i (31) gøres vilkårlig fin.

$$\mathbf{K}^{\text{layer}} = \frac{\ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Tilnærmede formfunktioner

Bestemmelsen af stivhedsrelationen i (29) skete på basis af en løsning til den styrende differentiaalligning udtrykt igennem elementarløsningerne (26) og (28). Ved mere komplekse problemstillinger som f.eks. stabilitetsberegninger eller hensyntagen til forskydningsfleksibilitet i bjælken er det imidlertid ikke altid muligt at løse den styrende differentiaalligning. Et alternativ er at benytte tilnærmede udtryk for elementarløsningerne svarende til de sædvanligt 3'grads polynomier for bjælkeelementer.

Flytningen $w(x)$ skrives som

$$w(x) = \mathbf{N} \mathbf{v} \quad (33)$$

hvor \mathbf{N} flytningsinterpolationsmatricen, og \mathbf{v} knudeflytningerne.

Svarende til udledningen i [2], side 21-22 bestemmes nu bidraget fra det elastiske lag.

Det elastiske lag har spændingerne $kw(x)$, og dette udsættes for en virtuel flytning $\delta w(x)$. Det virtuelle indre arbejde findes ved at integrere bidraget op over elementet.

$$A_{\text{indre}} = \int_V kw(x)\delta w(x)dx \quad (34)$$

Indsættelse af flytningsinterpolationen fra (33) giver

$$A_{\text{indre}} = \mathbf{v}^T \left(\int_V k\mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right) \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}^* \delta \mathbf{v} \quad (35)$$

Bidraget fra det elastiske lag er da direkte givet ved \mathbf{K}^* . Indsættelse af formfunktionerne og udregning giver ikke overraskende resultater:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{\text{layer}} \quad (36)$$

De tilnærmede formfunktioner giver altså en stivhedsmatrix, der er en korrekt 1. ordens tilnærmelse til den eksakte. I Frame2D, [3], er der indlagt et elastisk underlag svarende til (36).

Anvendelse af elastiske underlag kan delvis simuleres med fjedre som vist i nedenstående Figur 8.

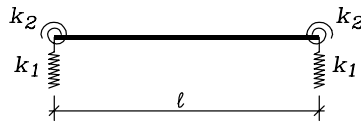


Fig. 8: Tilnærmet elementmodel

Fjederkonstanterne k_1 og k_2 giver alene bidrag til k_{11} , k_{22} , k_{33} og k_{44} . Størrelsen af k_1 bestemmes ved at give systemet en konstant flytning, og de 2 translationsfjedre skal yde den samme modstand som laget, og ikke overraskende fås:

$$k_1 = \frac{1}{2}k\ell \quad (37)$$

Fjederkonstanten k_2 bestemmes ved at give systemet en drejning i den ene ende, og man får:

$$k_2 = \frac{1}{105}k\ell^2 \quad (38)$$

I den lumpede udgave af stivhedsmatricen medtages ikke off-diagonal elementerne. Det giver forkerte resultater for f.eks. $\mathbf{v}^T = (1, 0, -1, 0)$ og $\mathbf{v}^T = (0, 1, -1, 0)$.

Litteratur

- [1] Hetényi, M. *Beams on Elastic Foundation*, Oxford University Press, 1946.
- [2] Damkilde, L. *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner.*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, F 118, 1990.
- [3] Damkilde, L. FRAME2D vrs. 1.0, User documentation, 1992.