

Deformationsmetoden  
for  
rammekonstruktioner

Lars Damkilde og Peter Noe Poulsen

BYG•DTU

Januar 2002

## Resumé

Rapporten omhandler anvendelse af deformationsmetoden til beregning af statisk ubestemte rammer. I notatet behandles alene lineære problemer, hvor superpositionsprincippet kan anvendes. Forudsætningerne er små flytninger og lineær-elastisk materialeopførsel.

I det første kapitel beskrives princippet i deformationsmetoden ved hjælp af 3 eksempler med op til 2 overtallige enten som drejninger eller flytninger. Ved beregningen er der valgt en mere ad-hoc baseret fremgangsmåde for at illustrere principperne bedst muligt. I de følgende kapitler gives en mere systematisk fremgangsmåde, som letter beregningsgangen men til gengæld er mere abstrakt. Kapitel 2 omhandler en mere systematisk beskrivelse af valg af overtallige. I kapitel 3 opstilles ligningerne til bestemmelse af de geometriske overtallige, og udledningen er baseret på Virtuelt Arbejdes Princip. I de følgende kapitler vises eksempler på metodens anvendelse.

## Forord

Forelæsningsnotatet er skrevet til brug i kurset 11512, Bjælker & Rammer. Formålet med notatet er at give de studerende en grundlæggende forståelse af deformationsmetoden til analyse af statisk ubestemte rammer. Notatet omhandler alene lineære beregninger, men de grundlæggende principper i valg af frihedsgrader kan også anvendes ved stabilitetsberegninger, se f.eks. notatet "Stabilitet af rammer - deformationsmetoden" af Lars Damkilde.

Lyngby, Januar 2002

Lars Damkilde og Peter Noe Poulsen

# Indhold

<b>1</b>	<b>Introduktion til deformationsmetoden</b>	<b>1</b>
1.1	System med 1 drejningsovertallig . . . . .	2
1.2	System med 2 drejningsovertallige . . . . .	6
1.3	System med 1 drejnings- og 1 flytningsovertallig . . . . .	11
1.4	Sammenligning med kraftmetoden . . . . .	15
1.5	Opsummering . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Valg af deformationsovertallige</b>	<b>19</b>
2.1	Ingen aksiale deformationer . . . . .	20
2.2	Bestemmelse af antal geometriske overtaglige . . . . .	22
2.3	Eksempler . . . . .	23
2.4	Andre konstruktionstyper . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Systematisk beregning af <math>Z</math>-koefficienter</b>	<b>31</b>
3.1	Virtuelt Arbejdes Princip . . . . .	31
3.2	Eksempel på beregning af $Z_i^0$ og $Z_i^j$ . . . . .	34
3.3	Betingelsesligninger $\mathbf{Z}\zeta = -\mathbf{Z}^0$ . . . . .	37
3.4	Bestemmelse af snitkræfter . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Eksempel - plan rammekonstruktion</b>	<b>41</b>
4.1	Konstruktionens stivhed . . . . .	41
4.2	Statisk last . . . . .	43
4.3	Temperaturlast . . . . .	46
4.3.1	Temperatur gradient over tværsnit - Krumningsændringer . . . . .	47
4.3.2	Konstant temperaturændring over tværsnit - Aksial forlængelse . . . . .	49
4.4	Fjederelement - afstivning . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Eksempel - plan gitterkonstruktion</b>	<b>55</b>
5.1	Konstruktionens stivhed . . . . .	56
5.2	Statisk last . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Eksempel - rumlig rammekonstruktion</b>	<b>61</b>

6.1	Konstruktionens stivhed . . . . .	61
6.2	Statisk last . . . . .	64
	<b>Litteratur</b>	<b>69</b>
A	<b>Bjælke løsninger</b>	<b>71</b>

# Kapitel 1

## Introduktion til deformationsmetoden

Deformationsmetoden er oprindeligt udviklet til at beregne snitkræfter i statisk ubestemte rammekonstruktioner. En af pionererne i udviklingen var A. G. Ostenfeld, der var den første professor i Bygningsstatik i Danmark, (Ostenfeld 1920). Metodens fordel i forhold til kraftmetoden er, at den ofte giver færre ubekendte, og dermed væsentligt mindre ligningssystemer. Begrænsninger i regnekapacitet er vanskelig helt at forstå i vore dage, men et lineært ligningssystem med 10 ligninger og 10 ubekendte var før ca. 1960 et voldsomt og ofte uoverstigeligt problem.

Elementmetoden (Finite Element Method), (Zienkiewicz 1967), er i dag den alt dominerende numeriske metode til konstruktionsanalyse, og deformationsmetoden kan opfattes som en forløber for elementmetoden. Principperne i metoderne har mange lighedspunkter, og en god indlevelse i deformationsmetoden vil lette forståelsen af elementmetodens mere generelle og abstrakte formuleringer.

En anden væsentligt grund til at interessere sig for deformationsmetoden er, at metoden giver en god indlevelse i statikken. Beregningerne er ofte nemmere at overskue end de tilsvarende for kraftmetoden. Med simple håndberegninger er man ofte i stand til at lave overslag over kraftforløbet i ret komplicerede konstruktioner, og man kan herved få kontrolleret sine FEM-beregninger.

I dette notat gennemgås udelukkende den lineære deformationsmetode, og det vil sige, at forudsætningerne er: små flytninger således at ligevægten kan opstilles i det udeformerede system og lineær-elastisk materiale. Det betyder, at superpositionsprincippet er gyldigt. Deformationsmetoden kan også anvendes til ikke-lineære problemer, men beregningsomfanget bliver hurtigt stort. Til stabilitetsberegninger er der udviklet effektive metoder, se f.eks. (Damkilde 1999).

Princippet i deformationsmetoden er at beskrive konstruktionens mulige flytningstilstande ved hjælp af de såkaldte flytningsovertallige, der er drejninger eller flytninger. Som eksempel kan betragtes en kontinuert bjælke over 2 fag, og drejningen over midterunderstøtningen vil blive brugt som flytningsovertallig. Ved hjælp af de flytningsovertallige kan systemet opdeles i underdele, der samvirker gennem de overtallige (analogien til elementmetoden er knuder og elementer). Konstruktionen opdeles i dele, som man kender løsningen for. Det kan f.eks. være en dobbeltind-

spændt bjælke med jævnt fordelt last eller en simpelt understøttet bjælke, hvis ene ende drejes en vinkel. Standardløsningerne gennemgås ikke i dette notat, og der henvises til lærebøger i elementær statik, f.eks. (Kassimalli 1999). Standardtilfældene kan løses ved opstilling af bjælkens differentiallyigning med tilhørende randbetingelser eller ved hjælp af kraftmetoden. I appendiks A er der angivet en række løsninger, og hvis det ikke er tilstrækkeligt, kan man finde yderligere eksempler i (Teknisk Ståbi 1995).

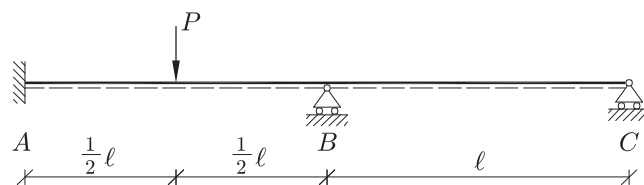
I kraftmetoden anvendes snitkræfter eller reaktioner som ubekendte, og antallet af ubekendte svarer præcis til graden af statisk ubestemthed. I deformationsmetoden er der ikke denne simple sammenhæng, og man kan både komme ud for at skulle bruge færre og flere afhængig af konstruktionens udformning. Det gør umiddelbart metoden mere vanskelig, men i kapitel 2 gives en systematisk indføring i valg af overtallige. Beregningsomfanget vil oftest blive mindre, og tolkningen af systemets stivhedsforhold er ofte nemmere end kraftmetodens fleksibilitetskoefficienter.

Deformationsmetoden vil blive introduceret igennem 3 indledende eksempler, hvor forudsætningerne alene baserer sig på kendskab til superposition og løsning af elementære statiske problemer for enkelt bjælker. I kapitel 2 vil der blive givet en systematisk indføring i valg af deformationsovertallige. I kapitel 3 vil der blive givet en mere systematisk metode til bestemmelse af stivhedsforholdene kaldet  $Z_i^j$  og belastningen kaldet  $Z_i^0$ . Uledningen vil blive baseret på det Virtuelle Arbejdes Princip. Herefter vises 3 eksempler, der illustrerer forskellige aspekter af anvendelser.

## 1.1 System med 1 drejningsovertallig

I Figur 1 er vist en kontinuert bjælke over 2 fag, som er indspændt i den ene ende og simpelt understøttet i den anden. Belastningen består af en enkeltkraft på midten af det ene fag.

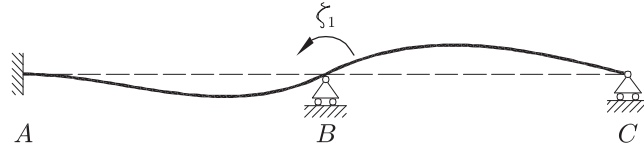
Konstruktionen er 2 gange statisk ubestemt, og som overtallige i kraftmetoden kunne man have valgt de 2 lodrette reaktioner i  $B$  og  $C$  eller lidt nemmere bøjningsmomenterne i  $A$  og  $B$ .



Figur 1: Konstruktion

Beskrives konstruktionen ud fra deformationerne er det tilstrækkeligt at have kendskab til drejningen i understøtningen  $B$ , som vist i Figur 2. Dette kan vises ved at opstille den styrende bjælkedifferentiallyigning for de 2 bjælkestykker  $AB$  og  $BC$ .

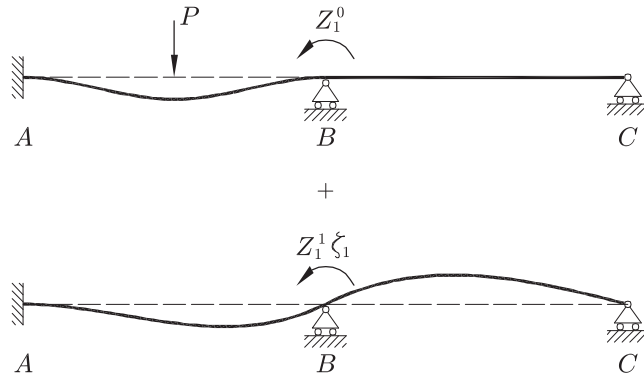
For at løse bjælkens differentiallyigning skal man kende 4 statiske eller geometriske randbetingelser, se f.eks. (Kassimalli 1999). I bjælke  $AB$  er flytningen  $w = 0$  i både  $A$  og  $B$ , og i  $A$  er drejningen  $\theta = 0$  (drejningen er den første afledede af flytningen  $w$  med hensyn til  $x$ ). I bjælke  $BC$  er  $w = 0$  i både  $B$  og  $C$ , og momentet i  $C$   $M_C = 0$



Figur 2: Deformationsfigur,  $\zeta_i$  drejningsovertallig

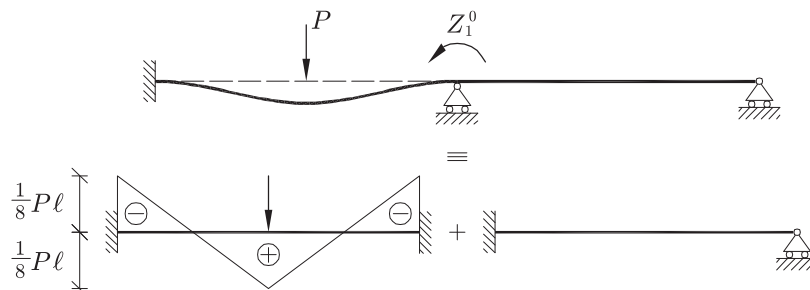
(Moment =  $-w_{,xx} EI$ ). Ud fra differentiallykningerne kan man se, at den eneste ubekendte er drejningen i B.

I Figur 3 er princippet i deformationsmetoden illustreret. Løsningsmetoden baserer sig på superpositionsprincippet, hvor løsningen splittes op i 2 dele. Den første del omfatter den ydre last alene og ingen vinkeldrejning i B. For at forhindre vinkeldrejning skal man påsætte et ydre tvangsmoment,  $Z_1^0$ , hvis størrelse beregnes senere. Det ydre tvangsmoment eksisterer ikke i virkeligheden, men indgår i løsningsteknikken. Den anden del af løsningen indeholder en drejning af bjælken i B af størrelsen  $\zeta_1$ . For at dreje bjælken en vinkel skal man igen påsætte et ydre moment, der er proportional med vinklen  $\zeta_1$  (lineær teori). Proportionalitetskonstanten  $Z_1^1$  bestemmes senere.



Figur 3: Opsplittet løsning med ydre tvangsmomenter  $Z_1^0$  og  $Z_1^1 \zeta_1$

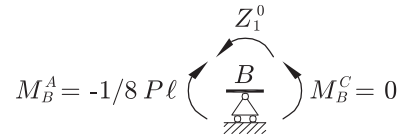
Løsningen til de 2 delproblemer, der defineres i Figur 3, sker ved hjælp af tabellerne i Appendiks A. I Figur 4 er løsningen for den ydre last og  $\zeta_1 = 0$  optegnet. Det bemærkes, at momentkurven ikke er kontinuert i B, og det skyldes det ydre tvangsmoment  $Z_1^0$ .



Figur 4: Bøjningsmomenter for ydre last alene og  $\zeta_1 = 0$



For at bestemme størrelsen af det ydre tvangsmoment lægges et snit omkring  $B$  som vist i Figur 5. For overskuelighedens skyld er der kun vist bøjningsmomenter på figuren.

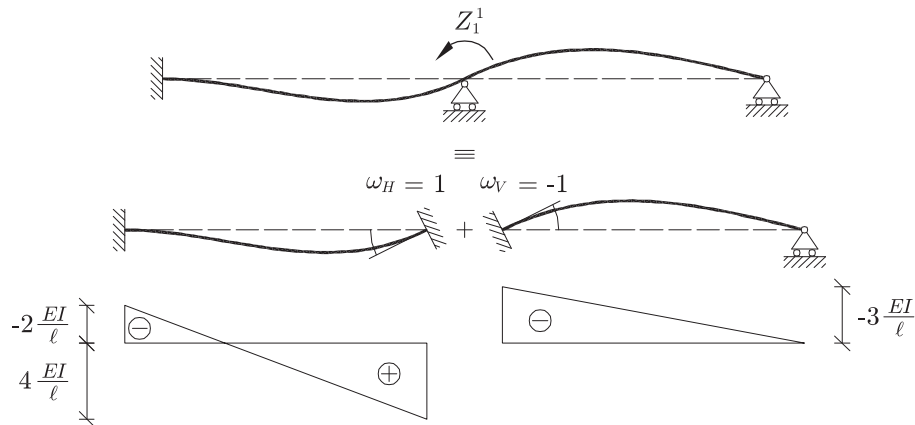


Figur 5: Snit omkring  $B$  til bestemmelse af  $Z_1^0$  (angiver kun bøjningsmomenter)

Ligevægt for den udskårne del giver:

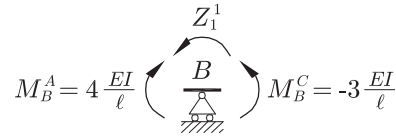
$$Z_1^0 = M_B^A - M_B^C = -\frac{1}{8}P\ell \quad (1)$$

I Figur 6 er løsningen for  $\zeta_1 = 1$  optegnet. Det bemærkes igen, at momentkurven ikke er kontinuert i  $B$ , og det skyldes det ydre moment  $Z_1^1$ . Størrelsen af vinklen sættes mest bekvemt til 1. Da teoriens forudsætninger er lineære, er selve størrelsen af vinklen underordnet. I den virkelige verden ville en vinkeldrejning på 1 (radian) være meget stor, og udbøjningerne ville ikke længere kunne regnes små.



Figur 6: Bøjningsmomenter for  $\zeta_1 = 1$  og ingen ydre last

Vinkeldrejningen  $\zeta_1$  og momentet  $Z_1^1$  skal regnes positiv i samme retning. Den globale vinkeldrejning  $\zeta_1$  bestemmer størrelsen af drejningen i de enkelte delbjælker. I bjælkerne bestemmes den positive retning af valget af underside. Princippet er, at drejningerne regnes positiv med uret i venstre endepunkt og positiv mod uret i højre endepunkt. I Appendix A er princippet illustreret. I figuren bliver vinkeldrejningen i bjælke  $AB$ 's højre endepunkt,  $\omega_H = 1$ , og vinkeldrejningen i bjælke  $BC$ 's venstre endepunkt,  $\omega_V = -1$ . Grunden til at vinkeldrejningerne i de 2 bjælker er forskellige selvom de stammer fra den samme fysiske drejning  $\zeta_1$ , skyldes alene fortegneregning. Fordelen ved den valgte fortegneregning er, at momenterne i hver ende bliver ens. Altså at en vinkeldrejning på 1 i enten venstre eller højre endepunkt kræver det samme moment.



Figur 7: Snit omkring  $B$  til bestemmelse af  $Z_1^1$  (angiver kun bøjningsmomenter)

Som før indlægges et snit omkring  $B$  for at bestemme  $Z_1^1$ .

Ligevægt for den udskårne del giver:

$$Z_1^1 = M_B^A - M_B^C = 4 \frac{EI}{\ell} - \left(-3 \frac{EI}{\ell}\right) = 7 \frac{EI}{\ell} \quad (2)$$

Det bemærkes, at  $Z_1^1$  består af en sum af lutter positive tal. Fysisk svarer det til, at hver bjælke modsætter sig deformationen. Dette er helt generelt, og ved anvendelse af den mere generelle fremgangsmåde som gennemgås i kapitel 3 er det en væsentlig kontrol at sikre dette.

Med bestemmelsen af de 2 momenter  $Z_1^0$  og  $Z_1^1$  kan betingelsesligningen for  $\zeta_1$  opstilles. Kravet er, at der ikke er noget resulterende ydre moment i  $B$ . Det vil sige at tvangsmomentet fra den ydre last  $Z_1^0$  skal ophæve tvangsmomentet fra en drejning af  $B$ ,  $Z_1^1 \zeta_1$ .

$$Z_1^1 \zeta_1 + Z_1^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta_1 = -\frac{Z_1^0}{Z_1^1} = \frac{1}{56} \frac{P\ell^2}{EI} \quad (3)$$

Det bemærkes, at den ydre belastning kun har indflydelse på  $Z_1^0$ . Denne del kaldes belastningsleddet eller mere generelt belastningsvektoren. Konstruktionens stivhedsforhold er defineret ved  $Z_1^1$ , der mere generelt betegnes en stivhedsmatrix. Stivheden afhænger af konstruktionselementernes bøjningsstivhed og længder samt deres indbyrdes sammenhæng.

Bøjningsmomenterne kan findes ved hjælp af superposition, og der gælder generelt.

$$M_P = M_P^0 + \zeta_1 M_P^1 \quad (4)$$

hvor bøjningsmomentet i et punkt,  $M_P$ , bestemmes som summen af bøjningsmomentet for den ydre last alene  $M_P^0$  og for drejningen alene  $\zeta_1 M_P^1$ . For forskydningskræfter og normalkræfter gælder tilsvarende udtryk som givet for bøjningsmomentet i (4).

Bøjningsmomentet i  $B$  bestemmes enten ud fra bjælke  $AB$  eller bjælke  $BC$ .

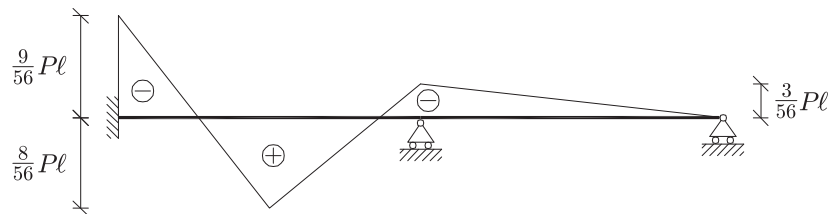
$$\begin{aligned} M_B^A &= -\frac{1}{8} P\ell + \zeta_1 4 \frac{EI}{\ell} = -\frac{3}{56} P\ell \\ M_B^C &= 0 + \zeta_1 \left(-3 \frac{EI}{\ell}\right) = -\frac{3}{56} P\ell \end{aligned} \quad (5)$$

Bøjningsmomentet i  $B$  er kontinuert, som det skal være i den virkelige løsning, da der ikke er noget ydre moment i  $B$ . Kravet til kontinuitet i momenterne er en god kontrol mulighed, som vil kunne afsløre eventuelle fejl i beregningen af drejningen. Momenterne i  $A$  og midt på bjælke  $AB$  bestemmes analogt som vist i (6)

$$M_A = -\frac{1}{8}P\ell + \zeta_1\left(-2\frac{EI}{\ell}\right) = -\frac{9}{56}P\ell$$

$$M_{AB} = \frac{1}{8}P\ell + \zeta_1\left(-2\frac{EI}{\ell} + 4\frac{EI}{\ell}\right)/2 = \frac{8}{56}P\ell$$
(6)

Den samlede momentkurve er optegnet i Figur 8. Det negative moment i  $B$  er mindre end i  $C$ , da punkt  $B$  er mere fleksibel.



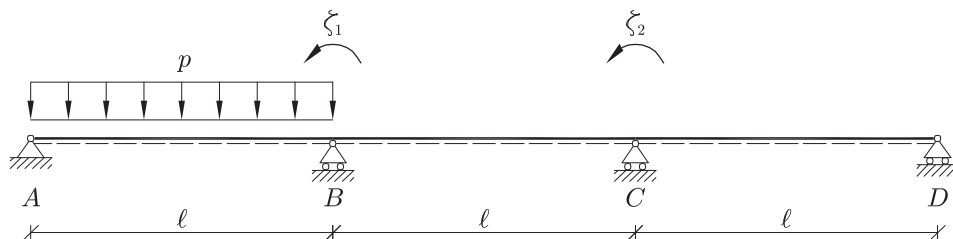
Figur 8: Bøjningsmomenter i den samlede løsning

Forskydningskræfterne kan bestemmes ved at indlægge passende snit og finde de lodrette reaktioner. Alternativt kunne forskydningskraftkurverne være optegnet sammen med delløsningerne, og superpositionsprincippet i (4).

## 1.2 System med 2 drejningsovertallige

I Figur 9 er vist en kontinuert bjælke over 3 fag. Bjælken har vandrette rullebaner i  $B$ ,  $C$  og  $D$  samt en fast simpel understøtning i  $A$ . Belastningen består af en jævnt fordelt last med intensiteten  $p$  på bjælken  $AB$ .

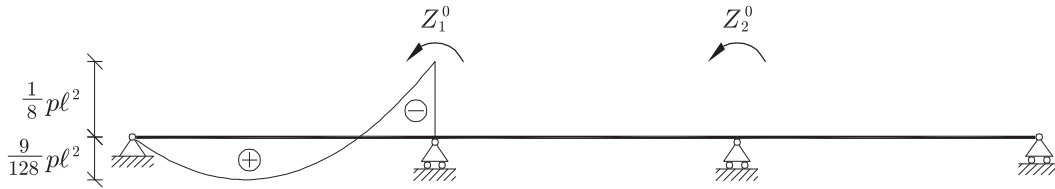
Konstruktionen er 2 gange statisk ubestemt, og som overtallige i deformationsmetoden kunne man f.eks. vælge momenterne i  $B$  og  $C$ . Beskrives konstruktionen ud fra deformationer skal man have kendskab til drejningen i  $B$ ,  $\zeta_1$  og drejningen i  $C$ ,  $\zeta_2$ . Ved at indføre de 2 drejninger kan systemet opdeles i 3 dele, bjælkerne  $AB$ ,  $BC$  og  $CD$ , hvor alle 4 randbetingelser er kendt, jævnfør ovenstående eksempel.



Figur 9: Konstruktion

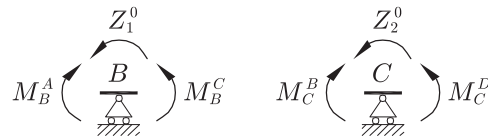
I modsætning til det forrige eksempel skal der her anvendes lige mange ubekendte i både kraft- og deformationsmetoden. I deformationsmetoden er antallet af overtallige ikke direkte afhængigt af antallet af understøtninger/charnierer men afhænger af konstruktionens statiske virkemåde. Udformes understøtningen i  $A$  som en fast indspænding, ændrer det ikke på de overtallige i deformationsmetoden men ville øge antallet af ubekendte i kraftmetoden med 1.

Fremgangsmåden er som før og i Figur 10 er optegnet bøjningsmomenterne for den ydre last og fastholdte drejninger. I modsætning til forrige eksempel er man nødt til at indføre 2 ydre tvangsmomenter,  $Z_1^0$  og  $Z_2^0$ , for at forhindre drejninger i både  $B$  og  $C$ . Der er kun bøjningsmoment i bjælke  $AB$ , da det er det eneste fag med ydre last.



Figur 10: Bøjningsmoment for  $\zeta_1 = 0$  og  $\zeta_2 = 0$

For at bestemme de ydre tvangsmomenter lægges snit omkring  $B$  og  $C$  som vist i Figur 11. For overskuelighedens grund er der kun vist bøjningsmomenter på figuren.



Figur 11: Snit omkring  $B$  og  $C$  til bestemmelse af ydre tvangsmomenter,  $Z_1^0$  og  $Z_2^0$

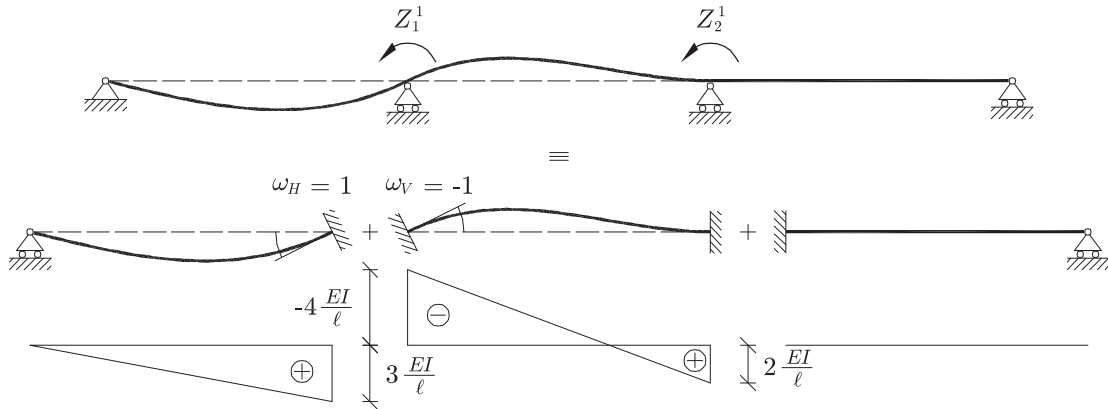
Ligevægt for de 2 snit giver:

$$\begin{aligned} Z_1^0 &= M_B^A - M_B^C = -\frac{1}{8}pl^2 \\ Z_2^0 &= M_C^B - M_C^D = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

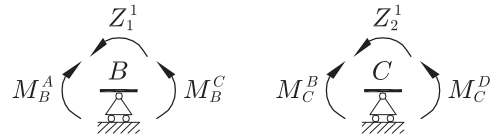
Fortegnet på det ydre tvangsmoment kan ofte fastlægges ud fra simple fysiske overvejelser. Den ydre belastning på bjælke  $AB$  vil forsøge at dreje knude  $B$  så vinkeldrejningen  $\zeta_1$  bliver positiv. Det ydre tvangsmoment skal forhindre dette, og skal derfor virke i modsat retning, hvilket svarer til den negative værdi i (7). Da der ikke er last på bjælkerne  $BC$  og  $CD$  er det ydre tvangsmoment  $Z_2^0 = 0$ .

I Figur 12 er deformationsfiguren for  $\zeta_1 = 1$  og  $\zeta_2 = 0$  optegnet. For at fastholde denne tilstand skal knuderne  $B$  og  $C$  påvirkes med ydre tvangsmomenter  $Z_1^1$  og  $Z_2^1$ . Bøjningsmomenterne i bjælkerne er fundet ud fra standardtilfældene i Appendiks A.

Ved at lægge snit ind omkring  $B$  og  $C$  som vist i Figur 13 kan man bestemme de ydre tvangsmomenter. For overskuelighedens skyld er der som før kun medtaget bøjningsmomenter.



Figur 12: Bøjningsmoment for  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_2 = 0$  og ingen ydre last



Figur 13: Snit omkring  $B$  og  $C$  til bestemmelse af  $Z_1^1$  og  $Z_2^1$

Ligevægt af de udskårne dele giver:

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= M_B^A - M_B^C = 3\frac{EI}{\ell} - \left(-4\frac{EI}{\ell}\right) = 7\frac{EI}{\ell} \\ Z_2^1 &= M_C^B - M_C^D = 2\frac{EI}{\ell} \end{aligned} \quad (8)$$

Som i det foregående eksempel gælder der, at  $Z_1^1$  består af en sum af lutter positive tal. Fortegnet af  $Z_2^1$  kan man ikke udtale sig generelt om. Ved at betragte figuren kan man se, at knude  $C$  vil dreje med uret, hvis knude  $B$  påvirkes af et moment mod uret. Momentet  $Z_2^1$  skal forhindre dette, og fortegnet bliver derfor positivt.

Deformationsfiguren for  $\zeta_1 = 0$  og  $\zeta_2 = 1$  er ikke optegnet, da den ved symmetribetragtninger kan findes ud fra Figur 12. Bestemmelsen af de ydre tvangsmomenter  $Z_1^1$  og  $Z_2^1$  findes ved ligevægtsbetragtninger illustreret i Figur 13.

Ud fra symmetribetragtninger findes:

$$\begin{aligned} Z_2^2 &= Z_1^1 = 7\frac{EI}{\ell} \\ Z_1^2 &= Z_2^1 = 2\frac{EI}{\ell} \end{aligned} \quad (9)$$

Det er en generel egenskab at  $Z_1^2 = Z_2^1$ , hvilket kan vises ved hjælp af Betti's sætning.

Drejningerne  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$  bestemmes, så der ikke er noget resulterende ydre tvangsmoment i knuderne  $B$  og  $C$ . I forhold til det foregående eksempel opstilles der her 2

ligninger, men princippet er det samme.

$$\begin{aligned} Z_1^0 + Z_1^1 \zeta_1 + Z_1^2 \zeta_2 &= 0 \\ Z_2^0 + Z_2^1 \zeta_1 + Z_2^2 \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Ligningerne formuleres mest hensigtsmæssigt i en matrixformulering.

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\zeta} = -\mathbf{Z}_0 \quad (11)$$

hvor  $\mathbf{Z}_0^T = \{Z_1^0, Z_2^0\}$  og  $\boldsymbol{\zeta}^T = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ , og stivhedsmatricen, der altid er symmetrisk, er givet ved:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 \\ Z_2^1 & Z_2^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ved løsning af de 2 lineære ligninger findes:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{7}{360} \frac{p\ell^3}{EI} \\ \zeta_2 &= -\frac{2}{360} \frac{p\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad (13)$$

Som ventet drejer knude  $B$  mod uret, og knude  $C$  med uret, hvilket svarer til at bjælken bøjer nedad i yderfagene og opad i midterfaget. Drejningen i  $B$  er numerisk større end i  $C$ , hvilket svarer til at virkningen af lasten er størst tættest på.

Bøjningsmomenterne i konstruktionen kan findes ud fra superpositionsprincippet. Som i det forrige eksempel udregnes momenterne over understøtningerne på 2 måder, således at beregningerne kan kontrolleres.

$$\begin{aligned} M_B^A &= -\frac{1}{8}p\ell^2 + 3\frac{EI}{\ell}\zeta_1 = -\frac{1}{15}p\ell^2 \\ M_B^C &= -4\frac{EI}{\ell}\zeta_1 - 2\frac{EI}{\ell}\zeta_2 = -\frac{1}{15}p\ell^2 \\ M_C^B &= 2\frac{EI}{\ell}\zeta_1 + 4\frac{EI}{\ell}\zeta_2 = \frac{1}{60}p\ell^2 \\ M_C^D &= -3\frac{EI}{\ell}\zeta_2 = \frac{1}{60}p\ell^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Momenterne i  $B$  og  $C$  er kontinuerte, og der er derfor ikke noget resulterende ydre tvangsmoment.

Reaktionerne kan findes ved superposition ud fra deltilfældene. Dette kræver dog, at reaktionerne optegnes i forbindelse med delløsningerne, og det er oftest nemmere at beregne dem ud fra den endelige momentkurve.

Ved at snitte i  $B$  og betragte bjælke  $AB$  alene, kan den opadrettede reaktion i  $A$  bestemmes til:

$$R_A = (M_B - \frac{1}{2}pl^2)/\ell = \frac{13}{30}pl \cong 0.43pl \quad (15)$$

Den lodrette reaktion i  $D$  findes tilsvarende ved at snitte i  $C$  og betragte højre del.

$$R_D = M_C/\ell = \frac{1}{60}pl \quad (16)$$

Den lodrette reaktion i  $C$  bestemmes ved at snitte i  $B$  og betragte den højre del.

$$R_C = (-R_D 2\ell + M_B)/\ell = -\frac{1}{10}pl \quad (17)$$

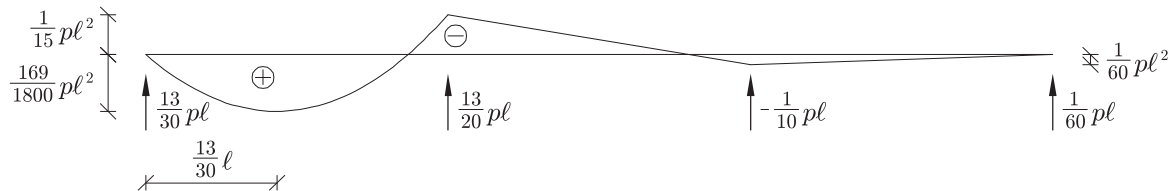
Reaktionen i  $C$  er altså som ventet nedadrettet.

Reaktionen i  $B$  kan findes ved at snitte i  $C$  og betragte venstre del. Herefter kan man så ved lodret projektion kontrollere resultatet. Af nemheds grunde anvendes her projektion, og  $R_D = \frac{13}{20}pl$ . Reaktionen i  $B$  er 50 % større end i  $A$ , hvilket skyldes den større stivhed af knude  $B$ .

For at finde det største positive moment på bjælke  $AB$  findes det punkt, hvor forskydningskraften er 0. Ud fra reaktionen i  $A$  ses, at forskydningskraften er 0 stykket  $s = \frac{13}{30}\ell \cong 0.43\ell$  fra  $A$ . Det maksimale positive moment i punktet findes ved at lægge et snit gennem punktet og betragte venstre del. Der tages moment om  $A$ , men man kunne også tage det om snittet.

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ps^2 \cong 0.094pl^2 \quad (18)$$

Momentkurven vil på de ubelastede fag være ret, og den samlede momentkurve er vist i Figur 14.



Figur 14: Bøjningsmoment og reaktioner i konstruktionen

### Øvelse 1

Prøv at gennemregne konstruktionen for jævnt fordelt last alene på midterfaget. Har løsningen de rigtige symmetri/antimetri forhold?

Hvorfor er det kun nødvendigt at beregne belastningsvektoren,  $\mathbf{Z}_0$ ?

### Øvelse 2

Opstil ud fra superposition af tidligere resultater belastningsvektoren,  $\mathbf{Z}_0$  for en jævnt fordelt last på hele bjælken. Bestem løsningen og begrund fortegnet på drejningerne.

### Øvelse 3

Hvilke ændringer vil det give, hvis understøtningen i  $D$  ændres fra en simpel understøtning til en fast indspænding?

Hvad ville det have betydet, hvis konstruktionen var beregnet med kraftmetoden?

### Øvelse 4

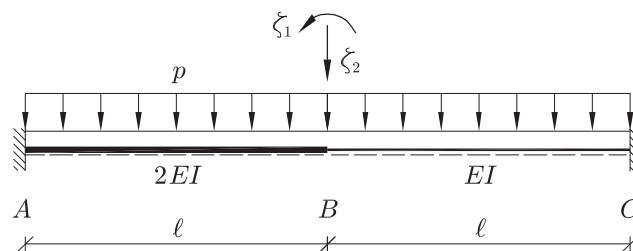
Prøv at løse eksemplet fra afsnit 1.1 ved at indføre 2 drejningsovertallige. Ud over drejningen i  $B$  anvendes drejningen i charniet i  $C$ . Momentkurven og drejningen i  $B$  skal selvfølgelig give det samme ved de 2 beregningsmetoder.

Med en drejningsovertallig beregnes drejningen i  $C$  ud fra momentkurven ved hjælp af Virtuelt Arbejdes princip. Denne drejning skal være lig den der bestemmes ud fra de to betingelsesligninger.

Øvelsen demonstrerer, at der godt kan indføres ekstra flytningsovertallige. Det gør det mere besværligt, men til gengæld skal man kun benytte standardtilfælde, hvor bjælkerne er dobbelt indspændte. Dette princip anvendes i Elementmetoden, hvor beregningsomfanget i denne type beregninger er mindre væsentligt.

## 1.3 System med 1 drejnings- og 1 flytningsovertallig

I Figur 15 er vist en dobbeltindspændt bjælke, hvor den ene halvdel har bøjningsstivheden  $2EI$  og den anden halvdel  $EI$ . Belastningen består af en jævnt fordelt last. Eksemplet er valgt for at introducere flytninger som overtallige. Som overtallige vælges drejningen og den lodrette flytning i  $B$ , og på den måde opdeles systemet i 2 dele, hvor løsningerne kan findes i Appendiks A.



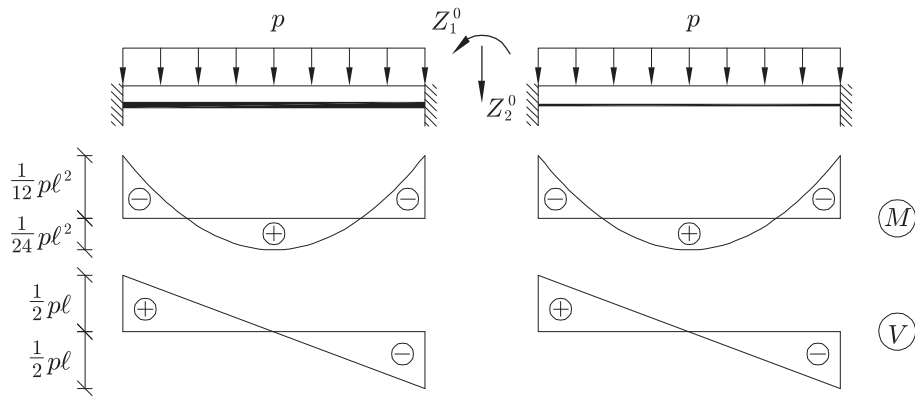
Figur 15: Konstruktion

Konstruktionen er 3 gange statisk ubestemt, men med hensyn til bøjningspåvirkningen er den reelt kun 2 gange statisk ubestemt. Konstruktionen kan regnes med kraftmetoden ved at indføre charniere ved begge indspændinger.



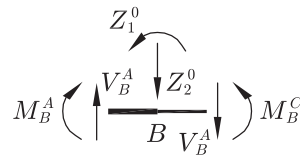
Den sidste grad af statisk ubestemthed kommer fra normalkraften i bjælken, og vil afhænge af bjælkens aksiale stivhed  $EA$ . Denne del er uinteressant her, da der kun kommer bøjning. Hvis normalkraften skal bestemmes, ville der også skulle være indført en vandret flytningsovertælling i  $B$ . Det er ikke normalt i deformationsmetoden, men i en elementmetodeformulering medtages denne del altid. Konstruktionen er et eksempel på, at i deformationsmetoden skal nogle snitkræfter efterfølgende bestemmes ved hjælp af andre betragtninger f.eks. ligevægt.

I Figur 16 er vist snitkraftkurverne for den ydre last og fastholdt drejning og flytning. Knude  $B$  fastholdes mod drejning af det ydre tvangsmoment  $Z_1^0$  og mod lodret flytning af den ydre tvangskraft  $Z_2^0$ . Da der indgår en tvangskraft medtages også forskydningskræfterne, idet der senere anvendes en kraftprojektionsligning til at bestemme den ydre tvangskraft.



Figur 16:  $M$  og  $V$  for ydre last og  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$

I Figur 17 er der vist et snit omkring knude  $B$ , og ligevægtsligningerne for den udskårne del bestemmer  $Z_1^0$  og  $Z_2^0$ .

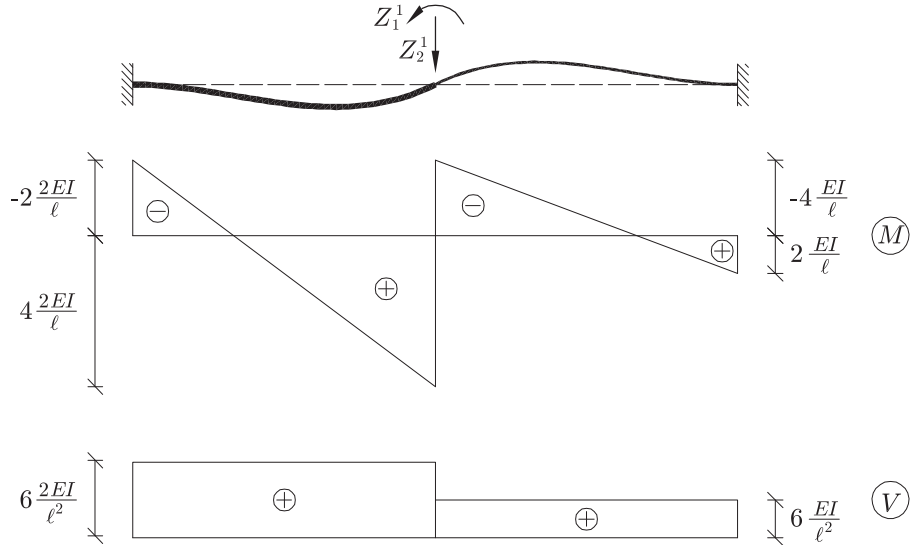


Figur 17: Snit omkring  $B$  til bestemmelse af  $Z_1^0$  og  $Z_2^0$  (normalkraft udeladt)

$$\begin{aligned} Z_1^0 &= M_B^A - M_B^C = -\frac{1}{12}p\ell^2 - \left(-\frac{1}{12}p\ell^2\right) = 0 \\ Z_2^0 &= V_B^A - V_B^C = -\frac{1}{2}p\ell - \frac{1}{2}p\ell = -p\ell \end{aligned} \quad (19)$$

For fastholdte knudflytninger virker  $B$  som en fast indspænding, og  $Z^0$ 'erne kan tolkes som reaktionerne i indspændingen. På grund af symmetri bliver der ikke noget indspændingsmoment i  $B$ , og  $Z_1^0 = 0$ . Den lodrette reaktion i  $B$  svarer til en opadrettet kraft med størrelsen  $p\ell$ , og derfor er  $Z_2^0 = -p\ell$ , da fortegneregningen for  $\zeta_2$  og dermed  $Z_2^0$  er valgt positiv nedad.

I Figur 18 er løsningen for  $\zeta_1 = 1$  og  $\zeta_2 = 0$  optegnet. Ved at indlægge et snit i  $B$  som vist i Figur 17 kan det ydre tvangsmoment  $Z_1^1$  og den ydre tvangskraft  $Z_2^1$  bestemmes.



Figur 18:  $M$  og  $V$  for  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_2 = 0$  og ingen ydre last

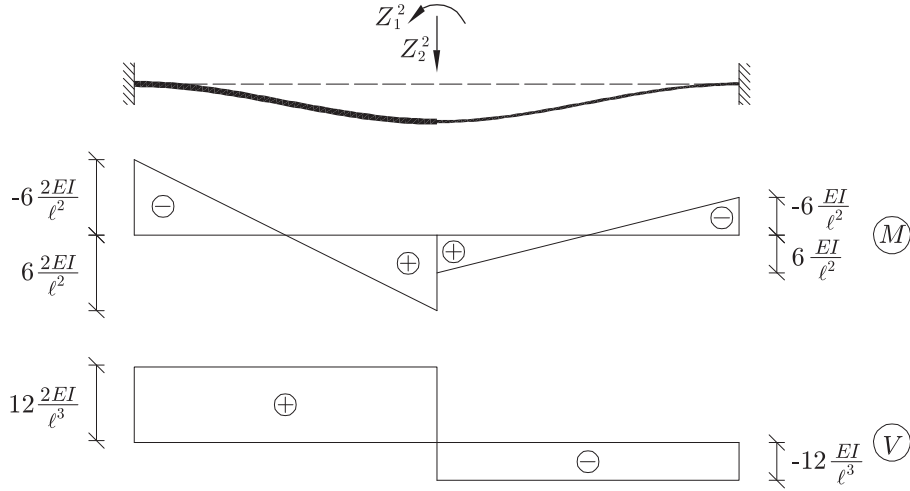
$$\begin{aligned} Z_1^1 &= M_B^A - M_B^C = 4 \frac{2EI}{\ell} - \left(-4 \frac{EI}{\ell}\right) = 12 \frac{EI}{\ell} \\ Z_2^1 &= V_B^A - V_B^C = 6 \frac{2EI}{\ell^2} - 6 \frac{EI}{\ell^2} = 6 \frac{EI}{\ell^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Hvis konstruktionen havde haft det samme inertimoment langs hele bjælken, ville  $Z_2^1$  blive 0. Dette kunne også være vist ud fra symmetribetragtninger, idet der ikke ville være nogen drejning af  $B$  for en lodret flytning af  $B$ . Hvis man bestemmer en tvangskraft eller tvangsmoment til at være 0, kan man ofte indse det ud fra fysiske betragtninger. Det kan skyldes symmetri eller at de overtallige ikke er direkte kobledede. Ved en kontinuert bjælke over 4 fag, vil der f.eks. ikke være nogle kobling mellem drejningerne af de næstyderste understøtninger.

I Figur 19 er løsningen for  $\zeta_2 = 1$  og  $\zeta_1 = 0$  optegnet. Enhederne for momenter og forskydningskræfter synes umiddelbart forkerte. Årsagen er, at flytningen  $\zeta_2$  ikke har en enhed. Når den virkelige flytning bestemmes, har den enheden  $m$ , og momenter og forskydningskræfter får hermed den rigtige enhed.

Ved at indlægge et snit i  $B$  som vist i Figur 17 kan det ydre tvangsmoment  $Z_1^2$  og den ydre tvangskraft  $Z_2^2$  bestemmes.

$$\begin{aligned} Z_1^2 &= M_B^A - M_B^C = 6 \frac{2EI}{\ell^2} - \left(6 \frac{EI}{\ell^2}\right) = 6 \frac{EI}{\ell^2} \\ Z_2^2 &= V_B^A - V_B^C = 12 \frac{2EI}{\ell^3} - \left(-12 \frac{EI}{\ell^3}\right) = 36 \frac{EI}{\ell^3} \end{aligned} \quad (21)$$



Figur 19:  $M$  og  $V$  for  $\zeta_1 = 0$  og  $\zeta_2 = 1$  og ingen ydre last

Kontrollen viser, at  $Z_1^2 = Z_2^1$ . Betingelsesligningerne opstilles som før, og her anvendes direkte en matrixnotation.

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 \ell^2 & 6 \ell \\ 6 \ell & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ -p\ell \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Løsningen af ligningssystemet giver:

$$\zeta = \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{66} \frac{p\ell^3}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2\ell \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Som ventet bliver den nedadrettede flytning positiv. Da den venstre del af bjælken er stivere end den højre må man forvente, at den højre del deformeres mest, og det er i overensstemmelse med at drejningen bliver negativ.

Ud fra superpositionsprincippet udregnes momenterne i  $A$  og  $C$ .

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{1}{12}p\ell^2 + \zeta_1\left(-2\frac{2EI}{\ell}\right) + \zeta_2\left(-6\frac{2EI}{\ell^2}\right) = -\frac{17}{44}p\ell^2 \\ M_C &= -\frac{1}{12}p\ell^2 + \zeta_1 2\frac{EI}{\ell} + \zeta_2\left(-6\frac{EI}{\ell^2}\right) = -\frac{13}{44}p\ell^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Som kontrol kan man udregne momentet i  $B$  både som  $M_B^A$  og som  $M_B^C$  og sikre, at der ikke er et momentspring. Denne udregning udelades her.

De lodrette reaktioner kan fås direkte fra forskydningskraftkurven, og man kan derfor anvende superposition af forskydningskraftkurverne.

$$\begin{aligned} R_A = V_A &= \frac{1}{2}p\ell + \zeta_1\left(6\frac{2EI}{\ell}\right) + \zeta_2\left(12\frac{2EI}{\ell^2}\right) = \frac{23}{22}p\ell \\ R_C = -V_B &= \frac{1}{2}p\ell + \zeta_1\left(-6\frac{EI}{\ell}\right) + \zeta_2 12\frac{EI}{\ell^2} = \frac{21}{22}p\ell^2 \end{aligned} \quad (25)$$

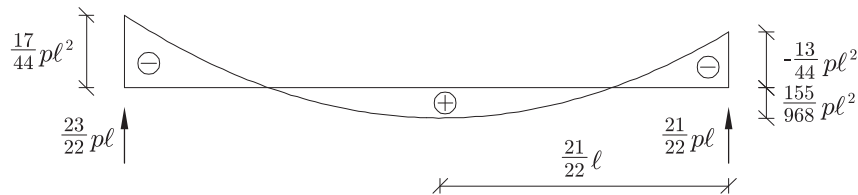
Summen af de lodrette reaktioner svarer til den ydre last, og som forventeligt bliver reaktionen i  $A$  større end reaktionen i  $C$ , da bjælke  $AB$ 's større stivhed gør at denne bærer mere end bjælke  $BC$ .

Det største positive moment findes, hvor forskydningskraften er 0. Dette punkt er placeret  $\frac{21}{22}\ell$  fra  $C$ , og størrelsen findes ved at snitte gennem punktet, og tage momentlignevægt om  $C$  for den højre del.

$$M_{\max} = M_C + \frac{1}{2}p\left(\frac{21}{22}\ell\right)^2 \cong 0.160p\ell^2 \quad (26)$$

Momentet på midten af en dobbelt indspændt bjælke med konstant tværsnit og et spænd på  $2\ell$  er ifølge Appendiks A  $1/6p\ell^2$ , og som forventet er der ikke stor forskel på de 2 momenter.

I Figur 20 er den samlede momentkurve optegnet.



Figur 20: Momentfordelingen

## 1.4 Sammenligning med kraftmetoden

Princippet i kraftmetoden er, at bestemme et statisk bestemt undersystem ved at tillade deformationsmæssige diskontinuiteter. Som eksempel på dette kan nævnes indlæggelse af et charnier, som kan give et knæk, som ikke er tilladt i den virkelige konstruktion. Størrelsen af de kraftovertallige bestemmes således, at den samlede løsning ikke indeholder disse diskontinuiteter. Dette princip har mange ligheder med deformationsmetoden, hvor man dog i stedet anvender moment/kraft-diskontinuiteter via tvangsmomenter/tvangskrafter. De overtallige i deformationsmetoden bestemmes igen så diskontinuiteterne fjernes.

En åbenlys forskel ligger i bestemmelsen af de overtallige, hvor fremgangsmåden er ret forskellig. Som det vil fremgå af næste kapitel, kan deformationsmetoden nemt systematiseres, og der er store ligheder med elementmetodeformuleringer. Valget af overtallige i kraftmetoden kan systematiseres i forbindelse med edb-beregninger, se f.eks. (Damkilde and Høyer 1993), men metoderne er dog ikke egnede for håndregning, idet beregningsomfanget bliver omfattende. Valget af de overtallige i kraftmetoden kræver derfor normalt et godt overblik, og evnen til at afgøre om en konstruktion er bevægelig eller ej. Antallet af overtallige i kraftmetoden er til gengæld nemt at bestemme, idet det svarer til antallet af gange konstruktionen er statisk ubestemt. Ved deformationsmetoden er der ingen direkte sammenhæng mellem antallet af overtallige og graden af statisk ubestemthed. Antallet af ubekendte i de

formationsmetoden kan både være større og mindre end antallet af ubekendte ved kraftmetoden.

Opstilling af betingelsesligningerne i kraftmetoden involverer integration af momentkurver multipliceret med krumninger over hele konstruktionen. Integrationen er principielt enkel men involverer et stort arbejde. Der kan anvendes integrationstabeller, som letter arbejdet. Beregningsomfanget afhænger meget af det valgte statiske hovedsystem, og ved et mindre heldigt valg kan man komme ud for at skulle integrere over hele konstruktionen. Den mere trænede dekobler konstruktionen ved at indlægge charnierer, således at beregningsomfanget bliver mindre, da momentkurverne får mere lokal karakter. Det kan være vanskeligt at vurdere størrelsen af integralerne specielt hvis der er valgt et mindre hensigtsmæssigt hovedsystem.

Som det vil fremgå af kapitel 3 kan beregningen af  $\mathbf{Z}$ -koefficienterne i deformationsmetoden systematiseres meget, og det består i at multiplicere flytninger og kræfter eller momenter og drejninger i alle elementernes endepunkter. Det er langt enklere end i kraftmetoden. Det er ofte nemt at vurdere størrelsen af de enkelte stivhedsled. En stor besparelse i deformationsmetoden ligger i anvendelsen af standardtabeller som vist i Appendiks A. Virkningen af den ydre last indgår kun via reaktionerne i endepunkterne, og det gør udregningen af de flytningsovertallige lettere.

Som en anden fordel ved deformationsmetoden kan nævnes, at den ligger meget tæt på elementmetodeprincippet, hvilket vil fremgå af næste kapitel.

Antallet af ubekendte ved anvendelse af de 2 metoder, kan være forskelligt. Kraftmetoden vil typisk give få ubekendte for fleksible konstruktioner, medens deformationsmetoden vil have færre overtallige ved mere kompakte konstruktioner.

En af deformationsmetodens andre fordele er, at understøtningsbetingelser kan ændres uden store beregningsmæssige konsekvenser. I eksemplet med den kontinuerte bjælke over 3 fag skal man blot justere nogle af stivhedstallene, hvis en simpel understøtning ændres til en fast indspænding. Ved en kraftmetode beregning vil en ændring i understøtningsbetingelser ofte få store konsekvenser, og man kan ikke være sikker på at kunne genbruge tidligere beregninger.

## 1.5 Opsummering

Statisk ubestemte konstruktioner kan løses ved at benytte deformationsovertallige i stedet for kraftovertallige som bruges ved kraftmetoden. Grundprincippet er ved hjælp af de deformationsovertallige at opdele systemet i et antal uafhængige dele, som kan løses v.h.a. kendte løsninger. De deformationsovertallige fastlægges ud fra, at der ikke er resulterende ydre kræfter, svarende til kraftmetodens system med flytningsdiskontinuiteter.

Antallet af flytningsovertallige afhænger ikke af graden af statisk ubestemthed men af konstruktionstypen. Deformationsmetoden vil typisk give de færreste ubekendte for relativt stive konstruktioner, mens kraftmetoden kan være fordelagtig ved meget fleksible konstruktioner.

I de følgende kapitler gives en mere systematisk behandling af deformationsmetoden, der gør den lettere at anvende. Nogle af de spørgsmål der behandles, er angivet

nedenfor.

- Hvordan fastlægges de flytningsovertallige?
- Hvordan systematiseres beregningen af  $\mathbf{Z}$ -koefficienterne?
- Hvordan behandles temperaturbelastninger eller sætninger?
- Hvordan behandles gittersystemer?
- Hvordan behandles rumlige rammekonstruktioner (vridning)?

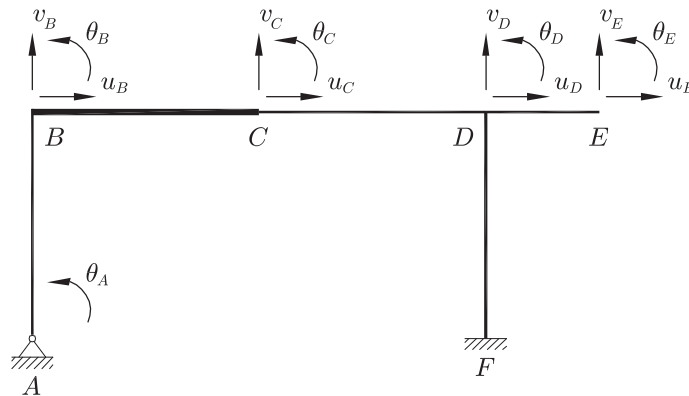


## Kapitel 2

# Valg af deformationsovertallige

For den der er erfaren i brug af deformationsmetoden, er det at vælge de overtallige ret enkelt, og noget "man bare kan se". For også at give begynderen en chance for at vælge rigtigt er der i dette kapitel givet en systematisk fremgangsmåde til at bestemme de nødvendige flytningsovertallige. Metoden kan virke lidt omstændelig, men er en god start for den utrænede, som så på et senere tidspunkt kan opnå en mere intuitiv præget forståelse, hvor man bare ser sig til resultatet.

Princippet i deformationsmetoden er at opdele konstruktionen i dele også kaldet *elementer*, hvis statiske opførsel er kendt. De overtallige er knyttet til punkter også kaldet *knuder*, og i en plan konstruktion er der i hvert punkt principielt mulighed for 3 overtallige, der består af 2 flytninger og 1 drejning. Fremgangsmåden er helt analog til valget af knuder og elementer i elementmetoden, se f.eks. (Damkilde 1990). Knuder indlægges i alle de punkter, hvor der er understøtninger, samlinger mellem bjælke dele, indre charnierer eller spring i tværsnittet. På Figur 1 er der vist et eksempel, hvor der er lagt knuder og overtallige ind. Bemærk at det er nødvendigt både at indføre en tværflytning og en drejning ved spring i tværsnittet, jævnfør f.eks. Afsnit 1.3.



Figur 1: Muligt valg af overtallige



## Understøtninger, frie ender eller indre charnierer

Ved understøtningen i  $F$  er der ikke medtaget nogle overtallige, idet indspændingen sikrer at alle de 3 mulige flytningsovertallige er 0. I  $A$  er der ingen lodret og vandret flytningsovertallig, men der er mulighed for en drejning af knuden.

For yderligere at reducere antallet af overtallige betragtes understøtningen i  $A$  og den frie ende i  $E$  nærmere.

I knude  $A$  er det statiske krav, at momentet er 0, hvilket medfører at den anden afledede af tværflytningen også er 0. Den statiske randbetingelse definerer hermed indirekte en geometrisk randbetingelse for bjælke  $AB$ . Som vist i kapitel 1 skal der 4 randbetingelser til at bestemme tværflytningerne, og for bjælke  $AB$  er dette opfyldt med den vandrette flytning og drejning i  $B$  og de 2 betingelser i  $A$ , nemlig at tværflytningen og den anden afledede er nul.

I den frie ende i  $E$  er der 2 statiske randbetingelser, idet både bøjningsmoment og forskydningskraft er 0. De statiske krav definerer som før indirekte geometriske randbetingelser svarende til at den anden og tredje afledede af tværflytningen er 0 i  $E$ . Det betyder, at det ikke er nødvendigt at medtage den lodrette flytning og drejning i  $E$ . Dette vises senere i Figur 6.

Behandlingen af indre charnierer er lidt mere kompleks, og yderligere information kan findes i Figur 5 og 7. Hvis 2 bjælker samles med et indre charnierer er det ikke nødvendigt at indføre en drejningsovertallig i knuden, da momentet er 0. I samlinger hvor mere end 2 bjælker samles er den drejningsovertallige nødvendig, hvis nogle af bjælkerne indbyrdes er stift forbundne. Man kan faktisk også opstille eksempler, hvor der skal anvendes mere end en drejningsovertallig i knuden, men det er for håndregningsproblemer næppe særligt relevant. Som eksempel kunne man forestille sig 4 bjælker samlet i et charnierer, og hvis bjælkerne parvist er stift forbundne, bliver der 2 uafhængige drejninger i knuden.

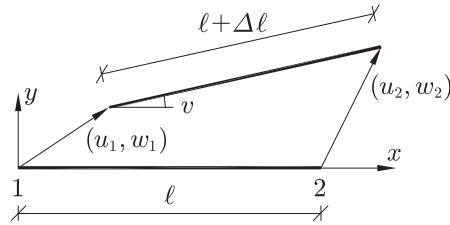
Fordelen ved at reducere antallet af overtallige er at regnearbejdet reduceres tilsvarende men også at overskueligheden bliver bedre. Ved reduktionen af overtallige finder man de flytninger, der definerer konstruktionens deformationer.

Der er ikke noget forkert i at medtage overtallige i charnierer eller frie ender, jævnfør f.eks. Øvelse 4 i kapitel 1. Det er også tilladt at indføre knuder andre steder, og indføre de nødvendige overtallige.

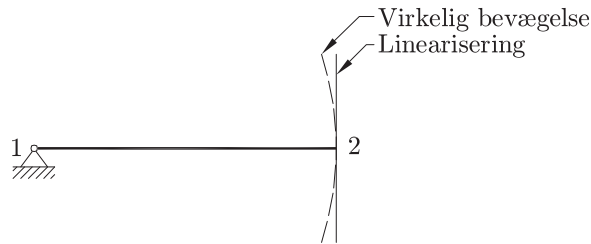
### 2.1 Ingen aksiale deformationer

For yderligere at reducere antallet af ubekendte indføres den tilnærmelse, at aksiale deformationer er 0, d.v.s. at bjælkerne regnes ustrækkelige i længderetningen. Det er ofte en meget god tilnærmelse, idet bjælker normalt er meget stive i aksial retning. Figur 2 viser flytningerne af et elements endepunkter. Drejning af en bjælkeende i forhold til den rette linie mellem elementets endepunkter regnes ikke at ændre længden af elementet og er derfor ikke vist.

Da forudsætningen er en lineær teori, kan flytningerne regnes meget små i forhold til bjælkeelementets længde. Længdeændringen  $\Delta\ell$  kan direkte udtrykkes ved de



Figur 2: Flytning af element



Figur 3: Relativ bevægelse af endepunkt

aksiale flytninger  $u_1$  og  $u_2$ .

$$\Delta l = u_2 - u_1 \tag{1}$$

Tilnærmelsen at aksiale deformationer er 0, svarer altså til, at de aksiale flytninger i endepunkterne er ens.

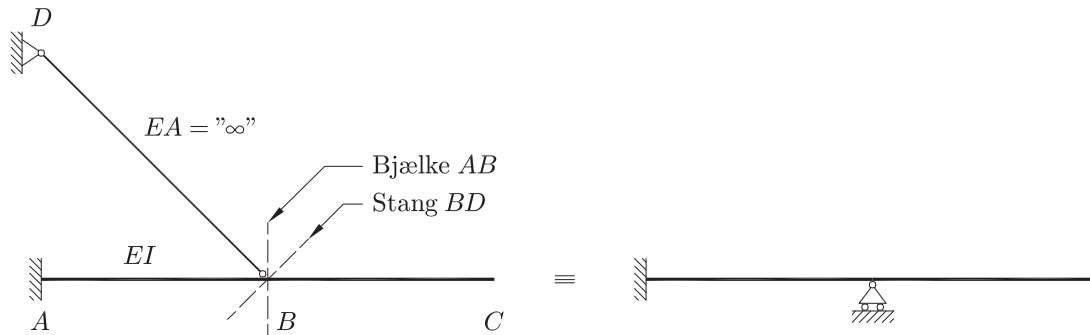
$$u_1 = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ustrækkelighed} \tag{2}$$

Da drejningerne regnes meget små, kan vinkeldrejningen  $v$  af elementet skrives som:

$$v = \frac{w_2 - w_1}{l} \tag{3}$$

Når længdeændringer er 0 vil det ene endepunkt relativt bevæge sig på en cirkel som vist i Figur 3. Forudsætningen om små flytninger svarer til en linearisering som vist i figuren. I en lineær teori vil bjælken altså bevæge sig vinkelret på bjælkeaksen. Dette er ikke intuitivt klart, men er en konsekvens af tilnærmelsen om små flytninger. I virkelighedens verden er problemet ikke-lineært fra starten men effekten er meget beskeden. Fordelen ved lineariseringen ligger bl.a. i anvendelsen af superpositionsprincippet.

En konsekvens af tilnærmelsen om ustrækkelighed er, at normalkræfterne kun bestemmes indirekte, og i sjældnere tilfælde ikke kan bestemmes entydigt. Ved Elementmetodeformuleringer (FEM) anvendes der ingen tilnærmelser, og den aksiale flytning indgår direkte som ubekendt. For at kunne sammenligne elementmetodeberegninger med deformationsmetodeberegninger, kan det være hensigtsmæssigt i elementmetodeberegningen at anvende et meget stort tværsnitsareal. Herved simuleres deformationsmetodens forudsætninger, og beregningerne skal give det samme. Man bør dog



Figur 4: Understøtning af punkt v.h.a. 2 ustrækkelige elementer

ikke glemme, at elementmetodens resultater, ved anvendelse af det reelle tværsnitareal, er de mest realistiske.

Ustrækkelighedsbetingelsen kan bruges til at undersøge om punkter ligger fast eller er bevægelige. Hvis et punkt fastholdes af 2 bjælker, der ikke er parallelle, og som begge er fastholdt i den anden ende, er punktet også fast. Dette er vist i Figur 4. Af figuren fremgår at punktet  $B$  set ud fra bjælke  $AB$  kun kan bevæge sig lodret og set ud fra stang  $DA$  kun kan bevæge sig langs en skrå linie. Det betyder at  $B$  kan regnes at ligge fast. Konstruktionen kan derfor regnes som en bjælke med vandret rullebane. Det skal bemærkes, at normalkraften i bjælken ikke bliver korrekt. Den skrå stang vil give anledning til normalkraft i  $AB$ .

Forudsætningen for at stangen kan regnes ustrækkelig, er at den aksiale stivhed er meget stor. Senere behandles det samme eksempel, hvor der tages hensyn til den aksiale stivhed.

I mere komplekse konstruktioner kan princippet med, at 2 skrå bjælker fastholder et punkt være nyttigt til at fastlægge hele systemets bevægelighed. Til det formål kan fastholdte punkter nemlig opfattes som understøtninger. Fastholdelse af punkter v.h.a. 2 ikke-parallelle stænger er et grundlæggende princip i udformninger af gitterkonstruktioner.

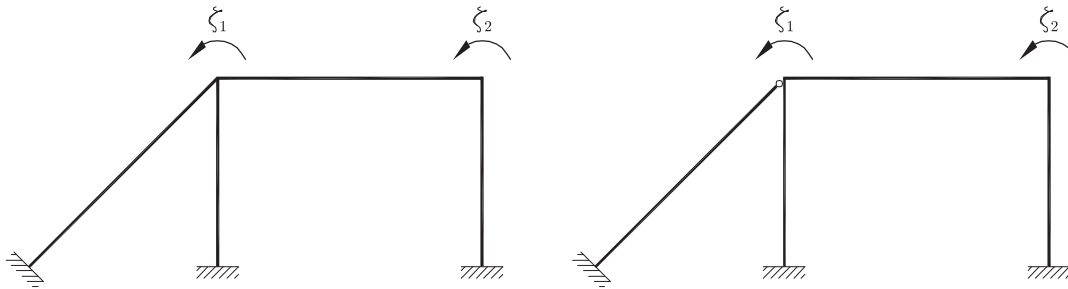
I modsætning til forholdene omkring charnierer eller frie ender er der ikke valgfrihed om opfyldelse af ustrækkelighedsbetingelsen. Hvis man medtager aksiale deformationer, skal man også medtage de tilsvarende statiske størrelser altså normalkræfter.

## 2.2 Bestemmelse af antal geometriske overtallige

Det er ikke muligt at give en simpel formel for antallet af overtallige i deformationsmetoden, men nedenfor gives der nogle håndregler.

Antallet af potentielle overtallige er givet ved  $3NNO$ , hvor  $NNO$  er antallet af knuder (Number of NOdes). Antallet af fastholdte overtallige kaldet  $NSUP$  (Number of SUPports) vil reducere antallet af overtallige. En indspænding svarer til 3 fastholdelser og en rullebane til 1.

For at sikre ustrækkelighedsbetingelsen skal der opstilles et krav til de overtallige for hvert element. Antallet af krav er  $NEL$ , hvor  $NEL$  er antallet af elementer (Number



Figur 5: Ingen simpel tælleregul

of Elements). Et krav til de overtallige vil svare til, at 1 af de overtallige kan udtrykkes ved de andre. Med andre ord er denne overtallige ikke længere uafhængig. Nogle af kravene er ikke nødvendigvis lineært uafhængige, og dermed fjernes der ikke nødvendigvis NEL overtallige. Dette vil blive vist mere detaljeret senere.

Antallet af frihedsgrader, NDOF (Number of Degrees Of Freedom), kan som tidligere sagt ikke bestemmes direkte med en formel, men lidt forenklet kan man sige:

$$\text{NDOF} \cong 3 \text{NNO} - \text{NEL} - \text{Nsup} \quad (4)$$

I Figur 5 er der vist en konstruktion, hvor antallet af knuder er 5, antallet af elementer 4 og antallet af understøtninger er  $3 \times 3$ . Formel (4) vil give 2 overtallige. Det svarer til 2 drejningsovertallige som vist på figuren. Man kan se, at den skrå bjælke fastholder konstruktionen vandret, og derfor er der kun mulighed for drejninger i knuderne. Formel (4) vil imidlertid fejle, hvis der havde været yderligere en skrå bjælke på højre side. Formlen ville have givet 1 overtallig selvom der stadig skal bruges 2. Problemet er, at de 2 skrå elementers ustrækkelighedsbetingelse er lineært afhængige (ens), og dermed fjernes der kun 1 overtallig af de 2 krav. I praksis er det problem ikke så tit forekommende, men man skal være opmærksom på problemet.

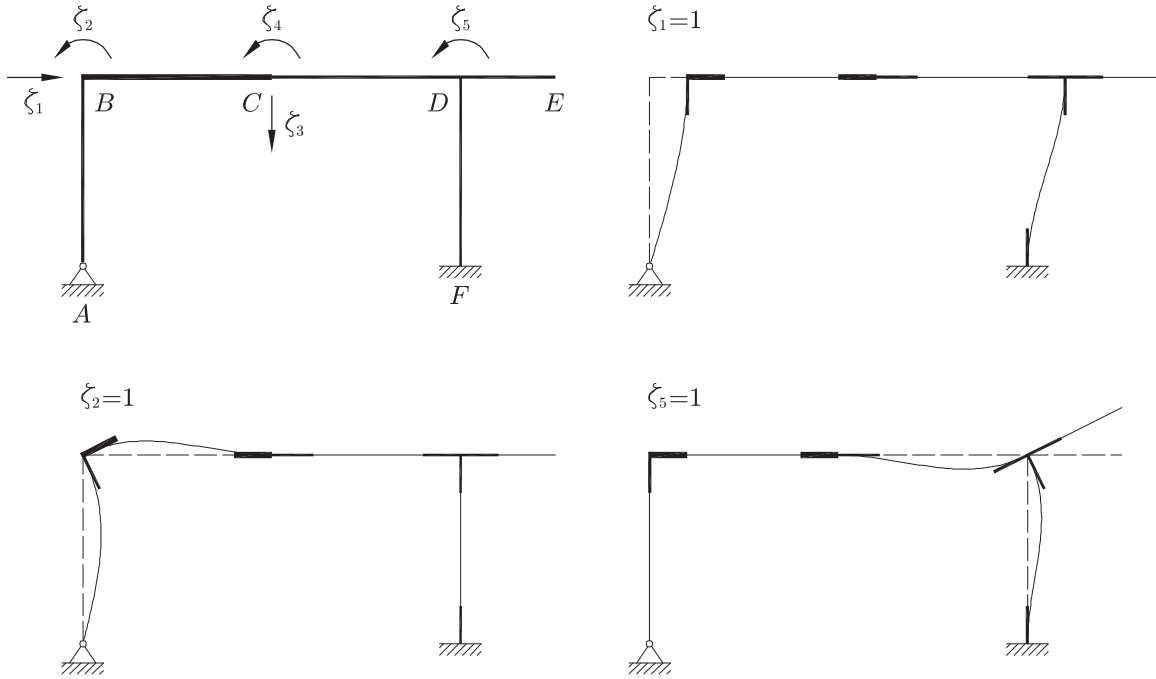
Et indre charnier vil nogle gange reducere antallet af overtallige med 1, som man f.eks. kan se i forbindelse med Figur 7. I tilfældet vist til højre i Figur 5 er der dog ingen ændring, da der stadig er 2 elementer, der er stift forbundne i knuden. Dette forhold betyder også, at det ikke er muligt at opstille en simpel formel til bestemmelse af antallet af overtallige.

## 2.3 Eksempler

I det følgende er vist 2 eksempler på valg af deformationsovertallige, og herudover er der 2 mindre øvelser.

### Indledende eksempel

I afnittet om understøtninger blev det vist, at drejningen i  $A$  samt flytningen og drejningen i  $E$  ikke er nødvendige for at løse problemet. Ustrækkelighedsbetingelsen skal som vist tidligere sikres for alle elementer. Betragtes de lodrette bjælker  $AB$  og



Figur 6: Deformationsmuligheder for  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  og  $\zeta_5$

*FD* ses, at de lodrette flytninger i henholdsvis *B* og *E* skal være 0, og de er derfor udeladt i Figur 6. Betragtes den vandrette bjælke *BCDE* ses, at alle vandrette flytninger skal være ens. Det er i Figur 6 vist ved den overtallige  $\zeta_1$ . Det er så underforstået, at hele bjælken *BCDE* flyttes  $\zeta_1$ , som vist i deformationsfiguren for  $\zeta_1 = 1$  i Figur 6.

Konstruktionen kan altså regnes med de 5 overtallige vist i Figur 6, hvor også de tilhørende deformationsfigurer for  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  og  $\zeta_5$  er vist. Deformationsfigurerne svarende til  $\zeta_3$  og  $\zeta_4$  kan findes i afsnit 1.3.

I Figur 6 er samlingerne markeret kraftigt på deformationsfigurerne. Tegneteknisk er det en stor fordel at starte med præcist at optegne, hvordan samlingerne bevæges. Bjælkernes deformation kan derefter relativt nemt skitseres ud fra de 2 endepunkter.

### Eksempel med ikke-retvinklede bjælkesamlinger

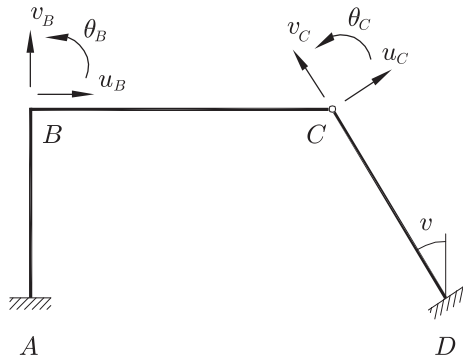
I Figur 7 er der vist et lidt vanskeligere geometrisk problem. De 6 mulige overtallige er optegnet på figuren. I knude *D* er det lettere at arbejde i et koordinatsystem orienteret efter *CD*.

Ustrækkelighedsbetingelsen for bjælke *AB* og *CD* giver umiddelbart at:

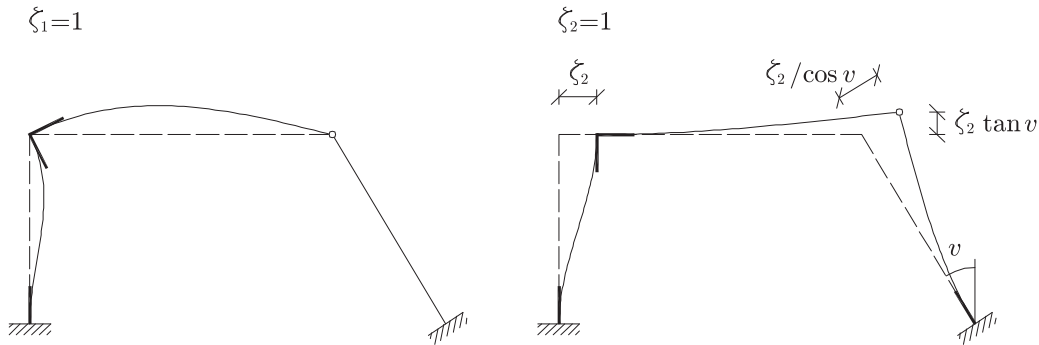
$$v_B = v_C = 0 \quad (5)$$

Ustrækkelighedsbetingelsen for bjælke *BC* giver:

$$u_B = u_C \cos v \quad (6)$$



Figur 7: Overtallige for ramme med et skævt hjørne



Figur 8: Deformationsfigur for ramme

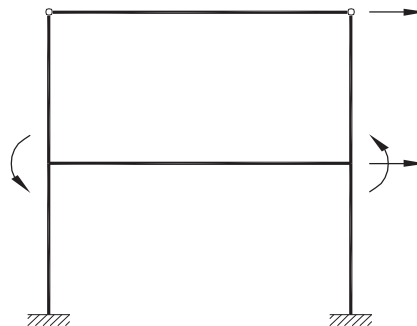
Det indre charnierer i  $C$  betyder, at drejningen  $\theta_C$  ikke er nødvendig.

Kravene betyder, at der er 2 overtallige tilbage. Den første er drejningen i  $B$ , og den tilsvarende deformationsfigur er vist i Figur 8.

Den anden overtallige er valgt som den vandrette flytning i  $B$ , men sammenhængen mellem  $u_B$  og  $u_C$  udtrykt i Formel (6) skal selvfølgelig overholdes. Deformationsfiguren er vist i Figur 8.

### Øvelse 1

Vis at den i Figur 9 viste konstruktion kan regnes med 4 overtallige.



Figur 9: 2 etages ramme

Optegn deformationsfigurerne for de overtallige.

Er det tilladt at indføre en lodret flytning i øverste venstre punkt som overtallig?

Er det tilladt at indføre en vandret flytning i øverste venstre punkt som overtallig?

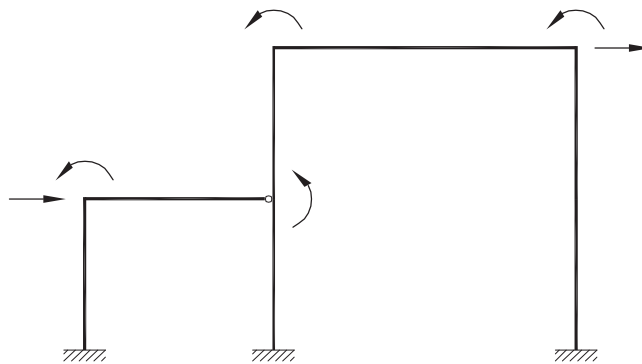
Er det tilladt at indføre en drejning i øverste venstre punkt som overtallig, og hvordan ser deformationsfiguren ud?

Kan man indføre 2 drejningsovertallige i det øverste venstre punkt?

Hvor mange overtallige skulle være anvendt ved kraftmetoden?

## Øvelse 2

Vis at den i Figur 2.3 viste konstruktion kan regnes med 6 overtallige.



Figur 10: Sammenbygget ramme

Optegn deformationsfigurerne for de overtallige.

Hvor mange overtallige skulle være brugt ved kraftmetoden.

## 2.4 Andre konstruktionstyper

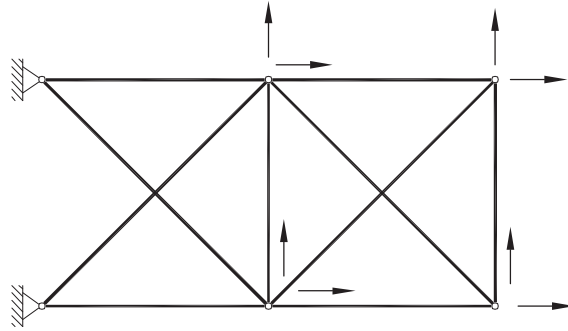
I dette afsnit behandles andre konstruktionstyper som kombinerede bjælke/stangsystemer, gitre samt rumlige konstruktioner. I de følgende kapitler vil disse emner blive behandlet mere detaljeret.

### Gitterkonstruktion

I en gitterkonstruktion indgår der kun elementer som kan tage tryk- eller træknormalkræfter. Normalkraften er defineret ud fra den aksiale forlængelse, og tilnærmelsen om ustrækkelighed i aksial retning er derfor ikke relevant. Der indføres 2 flytningsovertallige i hver knude, som vist i Figur 11.

Forlængelsen, af de enkelte stangelementer kan findes ved Formel (1). For at forlænge et stangelement  $\Delta\ell$  kræves en trækraft af størrelsen:

$$N = EA \frac{\Delta\ell}{\ell} = EA \frac{u_2 - u_1}{\ell} \quad (7)$$



Figur 11: Overtallige i et gitter

hvor  $u_2$  og  $u_1$  er aksiale flytninger af bjælkens endepunkter jævnfør Figur 2. Den aksiale stivhed er defineret ud fra elasticitetsmodulen  $E$  og tværsnitsarealet  $A$ .

Antallet af overtallige bliver hurtigt voldsomt, og metoden kan primært kun benyttes i forbindelse med edb-beregninger (elementmetodeformulering). Eksemplet kan regnes med kraftmetoden med 2 overtallige, og her er beregningsomfanget ret enkelt.

### Rammekonstruktion med stangelementer

Stangelementer kan indgå i rammekonstruktioner f.eks. i forbindelse med afstivninger som vist i Figur 12. Hvis stangen regnes uendeligt stiv i aksial retning, virker stangen som vist tidligere som en simpel understøtning. Afstivningsstænger har dog ofte så lille tværsnit, at det er nødvendigt med en mere præcis analyse. I eksemplet vil stangen aflaste bjælken, og for bjælken er det ikke på den sikre side at antage en uendelig aksial stivhed.

For at inddrage stangens forlængelser er det nødvendigt at indføre en ekstra lodret flytningsovertallig  $\zeta_2$ . Den lodrette flytning giver dels en drejning af stangen og en forlængelse som vist på figuren.

Normalkraften i stangen er givet ved normaltøjningen ganget med  $EA$ , og den bliver:

$$N = \frac{\zeta_2 \cos v}{\ell} EA = \zeta_2 \cos v \frac{EA}{\ell} \quad (8)$$

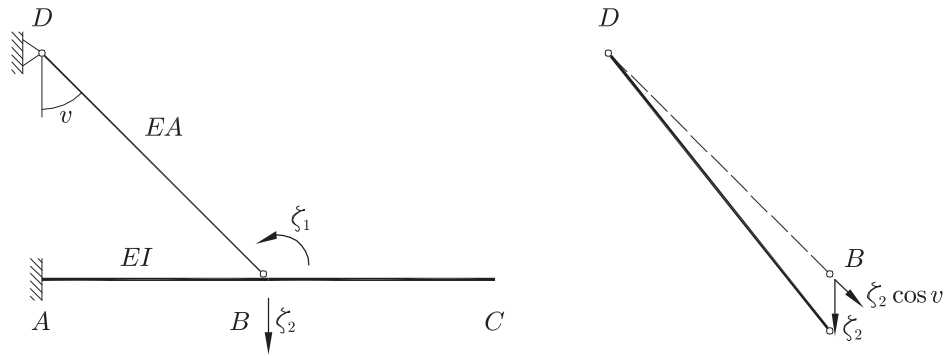
hvor stangens længde er  $\ell$ .

Stangkraften indgår i bestemmelsen af  $Z$ -koefficienterne, og f.eks. ved bestemmelse af  $Z_2^2$  giver den et bidrag til den lodrette projektion. Stangen vil øge systemets stivhed, og det svarer til at  $Z_2^2$  bliver større, jævnfør de generelle betragtninger om  $Z_i^i$  i Kapitel 1.

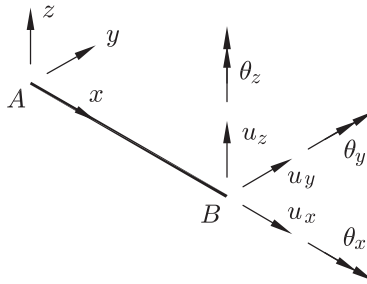
Et stangelement med længden  $\ell$  kan også opfattes som en aksial fjeder med fjederstivheden  $k$  givet ved:

$$k = \frac{EA}{\ell} \quad (9)$$





Figur 12: Overfald i kombineret stang/bjælke-system



Figur 13: Rumlig bjælke - bøjning om 2 akser samt vridning

Ved beregning af  $Z$ -koefficienterne indgår stangelementernes fjederstivhed direkte, som vist i (8).

Fjedre kan også anvendes til at definere modstand mod rotation, og fjederstivheden har enheden svarende til  $\frac{EI}{\ell^2}$ .

## Rumlige rammekonstruktioner

I rumlige rammesystemer skal der anvendes 6 overfald i hver knude. Der kommer en ekstra flytning og 2 ekstra drejninger. Frihedsgraderne er vist i Figur 13.

Den aksiale flytning vedrører normalkraften, og ustrækkelighedsbetingelsen i Formel (2) er stadig gyldig. I en rumlig bjælke kan der være bøjning om 2 akser. Flytninger og drejningsvektorer vinkelret på bjælkeaksen definerer denne del. Bøjning om 2 akser kan opfattes som 2 separate problemer, og svarer altså til grundtilfældene i det plane tilfælde. Komplexiteten er selvfølgelig meget større p.g.a. den rumlige orientering.

Drejningsvektorer parallelle med bjælkeaksen definerer vridningen i elementet. For at vride et bjælkeelement vinklen 1 kræves et vridningsmoment:

$$M_V = \frac{GI_V}{\ell} \quad (10)$$

hvor  $G$  er forskydningsmodulet og  $\ell$  er længden af bjælken. En nærmere beskrivelse af Vridningsinertimomentet  $I_V$  kan f.eks. findes i (Damkilde 2000).

For at fastholde et punkt i rummet kan det fastholdes i 2 ikke-parallele planer. Det vil sige at det kræver 3 bjælker, der ikke ligger i samme plan.



## Kapitel 3

# Systematisk beregning af $Z$ -koefficienter

Udregningen af  $Z$ -koefficienterne blev i Kapitel 1 baseret på ligevægt af løsskårne knuder. Denne metode kan altid anvendes, men det er ofte nemmere at anvende Virtuelt Arbejdes Princip. Med Virtuelt Arbejdes Princip kan man ofte mere direkte bestemme den ønskede størrelse, og man behøver ikke lave snit i konstruktionen.

### 3.1 Virtuelt Arbejdes Princip

Det Virtuelle Arbejdes Princip siger, at en konstruktion er i ligevægt, hvis det ydre virtuelle arbejde,  $A_y$ , er lig med det indre virtuelle arbejde,  $A_i$ , for alle mulige virtuelle flytningstilstande.

Det indre virtuelle arbejde kan opfattes som en sum over alle indgående bjælkeelementer:

$$A_i = \sum_{el=1}^{NEL} A_i^{el} \quad (1)$$

hvor  $A_i^{el}$  er bidraget til det indre virtuelle arbejde fra element  $el$ , og der summeres over antallet af elementer,  $NEL$ .

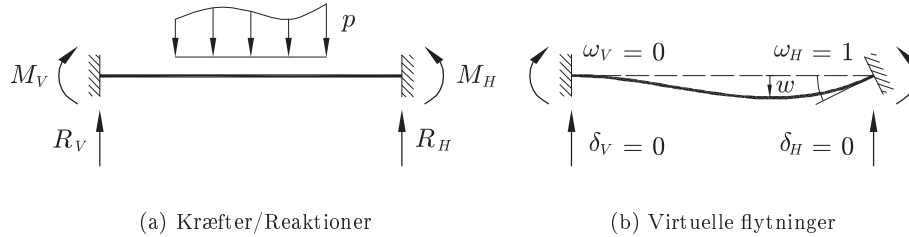
Ved beregning af det indre virtuelle arbejde,  $A_i^{el}$ , tages der normalt kun hensyn til bøjningsmomenter/krumninger som vist i (2), men senere diskuteres muligheden for at medtage bidrag fra forskydning og normalkraft.

$$A_i^{el} = \int_0^\ell M(x) (-w(x)_{,xx}) dx \quad (2)$$

hvor krumningen  $\kappa = -w(x)_{,xx}$  er anvendt.

En direkte beregning af integralet i (2) er normalt lidt omstændelig, da både bøjningsmoment og krumning varierer med koordinaten  $x$ . Ved at anvende Virtuelt

Arbejdes Princip for det enkelte bjælkeelement, der jo også skal være i ligevægt:  $A_i^{el} = A_y^{el}$ , kan integralet imidlertid forenkles. Udgangspunktet er et bjælkeelement som vist i Figur 1.



Figur 1: Virtuelt arbejde for bjælkeelement

Reaktionerne (momenter og kræfter) opfattes som ydre laste, og det ydre virtuelle arbejde,  $A_y^{el}$ , findes som summen af reaktionernes arbejde og den ydre lasts arbejde:

$$A_i^{el} = A_y^{el} = (\omega_H M_H + \delta_H R_H + \omega_V M_V + \delta_V R_V)_{el} + \int_{el} p(x) w(x) dx \quad (3)$$

idet kun fordelt last er medtaget.

Fordelen ved (3) er, at udregningen af det indre virtuelle arbejde,  $A_i^{el}$ , består i produkter af flytninger og kræfter i endepunkter samt et bidrag fra den ydre last på elementet. For standard bjælketilfælde kan reaktionerne let bestemmes ved hjælp af f.eks. Appendiks A.

Det virtuelle flytningsfelt kan vælges vilkårligt, men i denne sammenhæng er det hensigtsmæssigt at benytte virtuelle flytningsfelter, der svarer til de enkelte deformationsovertallige. Beregningen af  $Z_i^0$ - og  $Z_i^j$ -koefficienterne kan hermed systematiseres. Nedenfor er først givet en formel fremgangsmetode, og den eksemplificeres efterfølgende.

### Beregning af $Z_i^0$

Udgangspunktet er '0'-tilstanden, som foruden den ydre last indeholder de tvangskræfter  $Z_i^0$  som sikrer, at alle  $\zeta$ 'erne er 0. For at beregne  $Z_i^0$  vælges det virtuelle flytningsfelt der svarer til  $\zeta_i = 1$  (øvrige  $\zeta$ 'er er 0).

Det ydre virtuelle arbejde vil dels bestå af bidrag fra den ydre last, som virker på bjælkerne, og bidrag fra tvangskræfterne. Med det valgte virtuelle flytningsfelt er det imidlertid kun en af tvangskræfterne, der giver bidrag, nemlig  $Z_i^0$ . Det ydre virtuelle arbejde udregnes til:

$$A_y = Z_i^0 + \sum_{el=1}^{NEL} \int_{el} p^0(x) w^i(x) dx \quad (4)$$

hvor index  $i$  på flytningsstørrelser refererer til ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden og index 0 på reaktioner refererer til '0'-tilstanden.

Det indre virtuelle arbejde findes ved hjælp af (3) til:

$$A_i = \sum_{el=1}^{NEL} \left( (\omega_H^i M_H^0 + \delta_H^i R_H^0 + \omega_V^i M_V^0 + \delta_V^i R_V^0)_{el} + \int_{el} p^0(x) w^i(x) dx \right) \quad (5)$$

Idet  $A_i = A_y$  findes

$$Z_i^0 = \sum_{el=1}^{NEL} (\omega_H^i M_H^0 + \delta_H^i R_H^0 + \omega_V^i M_V^0 + \delta_V^i R_V^0)_{el} \quad (6)$$

Det bemærkes, at det ydre arbejde fra last på bjælkeelementerne forsvinder, og  $Z_i^0$  alene består af en sum af produkter af kræfterne (også momenterne) fra '0'-tilstanden og deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden. Denne proces beskrives med at "gange kræfterne fra '0'-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden".

### Beregning af $Z_i^j$

Udgangspunktet er kræfterne fra ' $\zeta_j = 1$ '-tilstanden, der som ydre last indeholder de tvangskræfter  $Z_i^j$  som sikrer, at  $\zeta_j = 1$ . For at beregne  $Z_i^j$  vælges det virtuelle flytningsfelt der svarer til  $\zeta_i = 1$ .

Med det valgte virtuelle flytningsfelt er der kun en af tvangskræfterne, der giver bidrag, nemlig  $Z_i^j$ . Det ydre virtuelle arbejde er:

$$A_y = Z_i^j \quad (7)$$

Det indre virtuelle arbejde findes ved (3) idet  $\zeta_j = 1$ -tilstanden dog ikke indeholder nogen belastning. Idet  $A_i = A_y$  findes direkte:

$$Z_i^j = \sum_{el=1}^{NEL} (\omega_H^i M_H^j + \delta_H^i R_H^j + \omega_V^i M_V^j + \delta_V^i R_V^j)_{el} \quad (8)$$

hvor index  $i$  på flytningsstørrelser refererer til ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden og index  $j$  på reaktioner refererer til ' $\zeta_j = 1$ '-tilstanden.

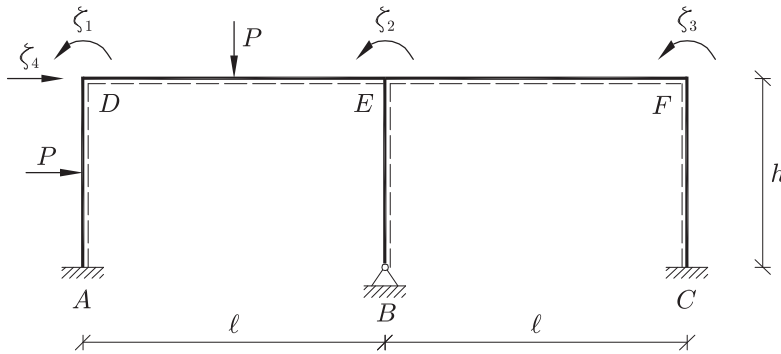
Tvangskraften  $Z_i^j$  findes altså ved at "gange kræfterne fra ' $\zeta_j = 1$ '-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden".

Der gælder generelt at

$$Z_i^j = Z_j^i \quad (9)$$

Formel (9) kan udledes af Betti's sætning, se f.eks. (Kassimalli 1999).

Ved udregningen af  $Z_i^i$  anvendes de virkelige kræfter og de virtuelle flytninger fra samme ' $\zeta_i = 1$ '-tilstand. Da hver bjælkedel vil yde en modstand mod bevægelse, skal  $Z_i^i$  altid bestå af en sum af positive tal.



Figur 2: Konstruktion med de valgte overtallige

### Bidrag fra forskydningskraft og normalkraft

Der er ingen principielle vanskeligheder ved også at medtage bidrag fra forskydningskræfter/forskydningstøjninger i bestemmelsen af det indre virtuelle arbejde. Det vil blot kræve, at elementartilfældene i Appendiks A løses under hensyntagen til forskydningsflexibilitet. Ved kraftmetoden gælder det samme forhold, idet man kan vælge enten at medtage forskydningskraft arbejdet eller negligere det.

Behandlingen af normalkraftens arbejde er lidt mere kompleks, idet man normalt i deformationsmetoden forudsætter ustrækkelighed. I dette tilfælde er det ikke muligt at medtage normalkraftens arbejde. Det har den konsekvens, at normalkraften ikke altid kan bestemmes entydigt. Som eksempel kan betragtes en dobbelt indspændt bjælke, der på midten påvirkes af en kraft i bjælkeaksens retning. Hvis ustrækkelighedsbetingelsen benyttes, kan man ikke afgøre om kraften optages som tryk, træk eller en blanding.

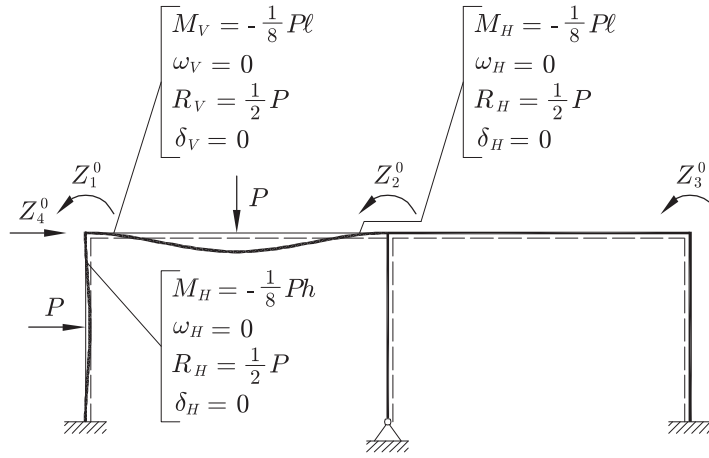
Hvis der ikke kræves ustrækkelighed, indgår normalkraftens arbejde direkte som vist i Afsnit 2.4. Arbejdet fra en normalkraft i en bjælke med længde  $\ell$  og aksial stivhed  $EA$ , svarer til arbejdet fra en fjeder med fjederkonstanten  $k = \frac{EA}{\ell}$ .

### 3.2 Eksempel på beregning af $Z_i^0$ og $Z_i^j$

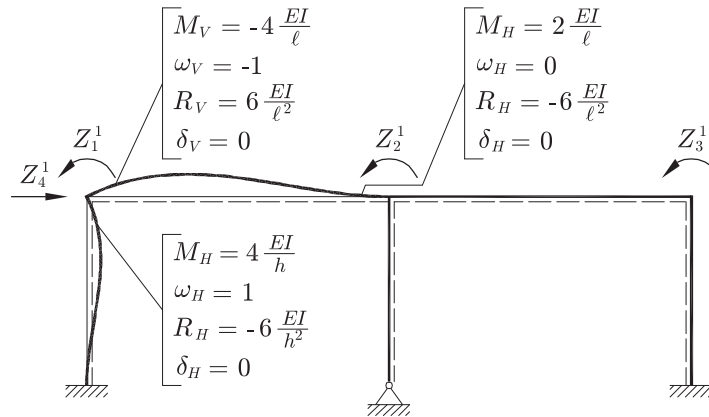
Som eksempel er valgt konstruktionen vist i Figur 2.

Konstruktionen kan regnes med 3 drejningsovertallige og 1 flytningsovertallig. Figur 3 viser løsningen for den ydre last med fastholdte knudflytninger også kaldet '0'-tilstanden. Tvangsmomenterne  $Z_1^0$ ,  $Z_2^0$  og  $Z_3^0$  samt tvangskraften  $Z_4^0$  skal påsættes for at sikre, at  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$ . På figuren er anført reaktionskræfter og reaktionsmomenter i de enkelte bjælkeender. For fuldstændighedens skyld er de tilsvarende deformationsstørrelser angivet selvom de ikke benyttes.

I Figur 4 er deformationsfiguren for  $\zeta_1 = 1$  optegnet. Deformationerne foregår udelukkende i element  $AD$  og  $DE$ . På figuren er hver bjælkeende påført tværflytningen og drejningen samt reaktionskraften og reaktionsmomentet. Fortegnsregningen afgøres af den valgte underside, og det observeres at vinkeldrejningen i  $D$  for bjælke  $AD$  er positiv mens den er negativ for bjælke  $DE$ . Det er vigtigt at kunne skelne



Figur 3: Ydre tvangs-kræfter/momenter og reaktioner i de enkelte bjælkeelementer for ydre last og fastholdte drejninger



Figur 4: Ydre tvangs-kræfter/momenter og reaktioner i de enkelte bjælkeelementer for  $\zeta_1 = 1$

mellem retningen af den globale drejning  $\zeta_1$  og de lokale drejninger i henholdsvis bjælke  $AD$  og  $DE$ . Fortegnsregningen er valgt svarende til Figur 1, som også er benyttet i Appendiks A.

De ydre tvangsmomenter  $Z_1^1, Z_2^1, Z_3^1$  og tvangskraft  $Z_4^1$  skal påsættes for at fremtvinge deformationstilstanden, hvor  $\zeta_1 = 1$  og de øvrige flytningsovertallige er 0.

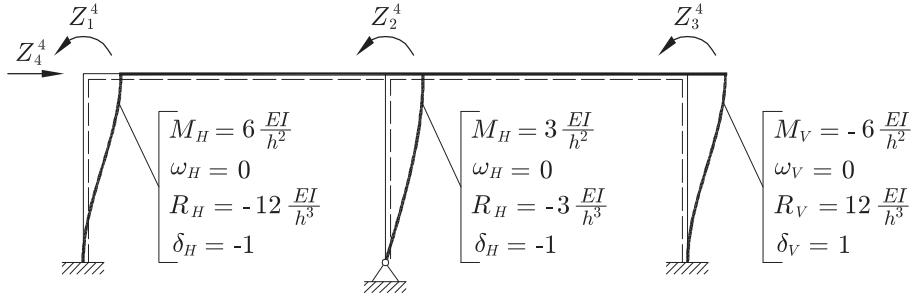
I Figur 5 er deformationsfiguren for  $\zeta_4 = 1$  optegnet. Den globale flytning  $\zeta_4$  oversættes til lokale flytninger i bjælkerne  $AD, BE$  og  $CF$ , og det bemærkes igen at fortegnet af den lokale flytning styres af den valgte underside.

På figuren ses de påførte tvangsmomenter/kræfter, og  $Z_i^j$  betyder den kraft eller det moment man skal påsætte i knude  $i$  for at give frihedsgrad  $j$  en enhedsflytning og sikre at de øvrige overtallige er 0.

### Beregning af $Z_1^0$ og $Z_4^0$

Formel (6), der forenklet siger, at "kræfterne fra '0'-tilstanden ganges med deformationerne fra den aktuelle flytningstilstand", benyttes til at finde  $Z_1^0$  og  $Z_4^0$ .





Figur 5: Ydre tvangs-kraefter/momenter og reaktioner i de enkelte bjaelkeelementer for  $\zeta_4 = 1$

Ved beregning af  $Z_1^0$  kommer der bidrag fra bjaelke  $AD$  og  $DE$ .

$$Z_1^0 = \omega_H^{AD} M_H^{AD} + \omega_V^{DE} M_V^{DE} = 1 \left(-\frac{1}{8}Ph\right) + (-1) \left(-\frac{1}{8}P\ell\right) = \frac{1}{8}P(\ell - h) \quad (10)$$

Som man kan se er bidraget fra de 2 ydre laste med modsat fortegn, idet den lodrette kraft søger at dreje knude  $D$  med uret og den vandrette kraft forsøger at dreje  $A$  mod uret.

Ved beregning af  $Z_4^0$  kommer der kun bidrag fra bjaelke  $AD$ .

$$Z_4^0 = \delta_H^{AD} R_H^{AD} = (-1) \left(\frac{1}{2}P\right) = -\frac{1}{2}P \quad (11)$$

Størrelsen af  $Z_4^0$  kunne også være bestemt ud fra en fysisk argumentation, idet halvdelen af den vandrette last går i understøtningen i  $A$  og den resterende halvdel skal optages af tvangskraften. Det negative fortegn skyldes at  $Z_4^0$  regnes positiv i samme retning som kraften. Den lodrette last giver ikke bidrag til  $Z_4^0$ .

### Beregning af $Z_1^1$ , $Z_1^4$ og $Z_4^4$

Ved beregning af  $Z_i^i$  ganges "kraefterne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden", jævnfør (8). Ingen af bjaelkerne må bidrage negativt til  $Z_i^i$ , jævnfør tidligere.

Til  $Z_1^1$  kommer der bidrag fra bjaelke  $AD$  og  $DE$ :

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= \omega_H^{AD} M_H^{AD} + \omega_V^{DE} M_V^{DE} \\ &= 1 \cdot 4 \frac{EI}{h} + (-1) \left(-4 \frac{EI}{\ell}\right) = 4EI \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{h}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Negative bidrag i  $Z_1^1$  vil være tegn på fortegnstfejl i reaktioner eller flytninger.  $Z_1^1$  kan relativt nemt findes ved momentligevægt af knude  $D$ , men anvendelsen af Virtuelt Arbejdes Princip er mindst lige så effektiv.

Til  $Z_4^4$  kommer der bidrag fra de 3 lodrette bjælker,  $AD$ ,  $BE$  og  $CE$ .

$$\begin{aligned} Z_4^4 &= \delta_H^{AD} R_H^{AD} + \delta_H^{BE} R_H^{BE} + \delta_V^{CF} R_V^{CF} \\ &= (-1) \left(-12 \frac{EI}{h^3}\right) + (-1) \left(-6 \frac{EI}{h^3}\right) + 1 \cdot 12 \frac{EI}{h^3} = 30 \frac{EI}{h^3} \end{aligned} \quad (13)$$

$Z_4^4$  kunne også være fundet ved et vandret snit igennem alle 3 lodrette bjælker, men det vil være mere besværligt.

$Z_4^1$  findes ved at "gange kræfterne fra ' $\zeta_1 = 1$ '-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_4 = 1$ '-tilstanden", jævnfør (8). Der kommer kun bidrag fra bjælke  $AD$ .

$$Z_4^1 = (\delta_H^{AD})_4 (R_H^{AD})^1 = (-1) \left(-6 \frac{EI}{h^2}\right) = 6 \frac{EI}{h^2} \quad (14)$$

hvor index 1 og 4 refererer til de to forskellige tilstande.

$Z_4^1$  kunne også være fundet ved at snitte igennem de 3 lodrette bjælker og tage en vandret projektion. Men man skal så lige overbevise sig selv om, at der ikke er forskydningskræfter i de lodrette bjælker  $BE$  og  $CF$ . Virtuelt arbejde giver en meget direkte måde at bestemme den ydre tvangskraft, og man skal ikke forholde sig til retningen af kræfter.

Størrelsen af  $Z_4^1$  er positiv, og det stemmer med at knude  $D$  vil bevæge sig mod venstre for et ydre moment i  $A$  virkende mod uret. Tvangskraften  $Z_4^1$  skal forhindre dette, og skal derfor været rettet mod højre og altså positiv.

Som kontrol kan man udregne  $Z_4^1$  idet det virtuelle flytningsfelt udgøres af tilstanden  $\zeta_1 = 1$  og de virkelige kræfter udgøres af tilstanden  $\zeta_4 = 1$ . Udregningen viser, at  $Z_4^1 = Z_1^4$ .

### 3.3 Betingelsesligninger $Z\zeta = -Z^0$

Nedenfor er givet en kort repetition af fremgangsmåden i deformationsmetoden.

#### Grundregler

1. Bestem de nødvendige overtallige og optegn deformationsfigurerne med påskrevne deformationer og kræfter i bjælkeenderne.
2. Bestem endekræfterne for ydre last og fastholdte overtallige ('0'-tilstanden).
3.  $Z_i^j$  findes ved at "gange kræfterne fra ' $\zeta_j = 1$ '-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden".
4.  $Z_i^0$  findes ved at "gange kræfterne fra '0'-tilstanden sammen med deformationerne fra ' $\zeta_i = 1$ '-tilstanden".
5. Kontroller at  $Z_i^i$  består af en sum af lutter positive tal, og at  $Z_i^j = Z_j^i$ .
6. Kontroller om fortegnet på  $Z_i^j$  svarer til det forventede.

Ud fra ovenstående opstilles et ligningssystem, der sikrer at løsningen ikke indeholder tvangskræfter/momenter, jævnfør Kapitel 1.

$$\begin{bmatrix} Z_1^1 & \cdots & Z_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_n^1 & \cdots & Z_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Z_1^0 \\ \vdots \\ Z_n^0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Ved løsning af det lineære ligningssystem findes de flytningsovertallige, og det er vigtigt at kontrollere størrelserne inden beregning af snitkræfterne. En meget enkel kontrol er at indsætte løsningen i ligningssystemet, og kontrollere at højresiden  $-\mathbf{Z}_0$  svarer til  $\mathbf{Z}\boldsymbol{\zeta}$ . En typisk fejl er at glemme det negative fortegn. Herudover bør størrelser og fortegn af de overtallige vurderes ud fra forventninger til løsningen.

Hvis en konstruktion ønskes gennemregnet for et nyt lasttilfælde, er det kun højresiden ( $\mathbf{Z}_0$ ) der skal beregnes. Systemets stivhedsmatrix ( $\mathbf{Z}$ ) afhænger alene af konstruktionens udformning og ikke dens belastning.

### Øvelse 1

Bestem  $Z_i^0$ - og  $Z_i^j$ -koefficienterne for Eksemplet i Afsnit 1.3 ved hjælp af den systematiske metode.

## 3.4 Bestemmelse af snitkræfter

Snitkraften i en bjælkeende kan findes direkte af superpositionsprincippet.

$$S = S^0 + \sum_{i=1}^{i=n} (S^i \zeta_i) \quad (16)$$

hvor  $S$  er den ønskede snitkraft (bøjningsmoment eller forskydningskraft). Størrelsen  $S^0$  er snitkraften i '0'-tilstanden, og  $S^i$  er snitkraften for  $\zeta_i = 1$ . Endelig er  $n$  antallet af overtallige.

Som kontrol er det vigtigt at bestemme bøjningsmomentet i en knude fra alle tilstødende bjælker. Som eksempel skal  $M_{DA} = M_{DE}$ . Hvis denne kontrol ikke stemmer, er der fejl i enten  $\mathbf{Z}$  eller  $\mathbf{Z}_0$ .

For at kunne beregne snitkræfterne i understøtningerne kan det være hensigtsmæssigt også at opskrive snitkræfter og deformationer i understøtningerne. Dette er af overskuelighedsgrunde udeladt i eksemplet, men i en praktisk beregning var endekræfterne i  $A$ ,  $B$  og  $C$  medtaget.

Når først snitkræfterne i endepunkterne er bestemt, kan maksimal moment langs bjælken bestemmes med de sædvanlige metoder. Maksimum for bøjningsmoment findes, hvor forskydningskraften er 0.

Da der normalt forudsættes ustrækkelighed, kan normalkræfterne ikke bestemmes ud fra de overtallige. Bestemmelsen af normalkræfterne må derfor ske ved in-

dlæggelse af passende snit og ligevægtsligninger. I sjældnere tilfælde kan man komme ud for, at normalkræfterne ikke kan bestemmes entydigt.



# Kapitel 4

## Eksempel - plan rammekonstruktion

Formålet med dette kapitel er at vise anvendelsen af deformationsmetoden på en lidt mere kompleks konstruktion. Valget af overtallige i konstruktionen er ikke omtalt i detaljer, da et tilsvarende eksempel tidligere er behandlet, se Figurerne 7 og 8 i Kapitel 2. Beregningen af  $Z$ -koefficienterne baserer sig på den systematiske metode beskrevet i Kapitel 3.

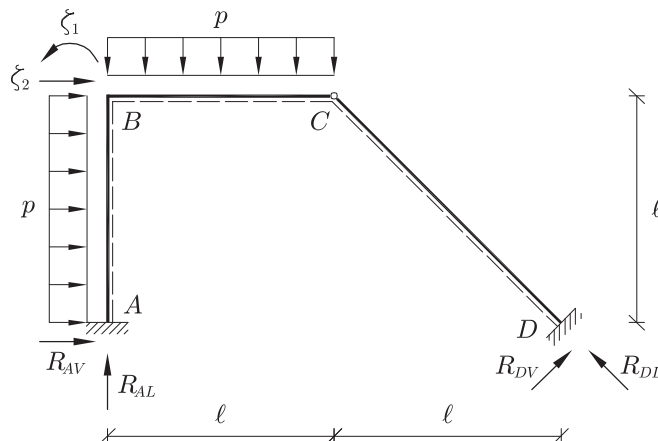
Figur 1 viser konstruktionen, understøtningerne og belastningen. Bøjningsstivheden  $EI$  er ens i alle bjælker. Konstruktionen regnes med 2 overtallige, drejningen af  $B$  og en vandret flytning af  $B$  og en dertil hørende forskydning af  $C$ , se Figur 3.

### 4.1 Konstruktionens stivhed

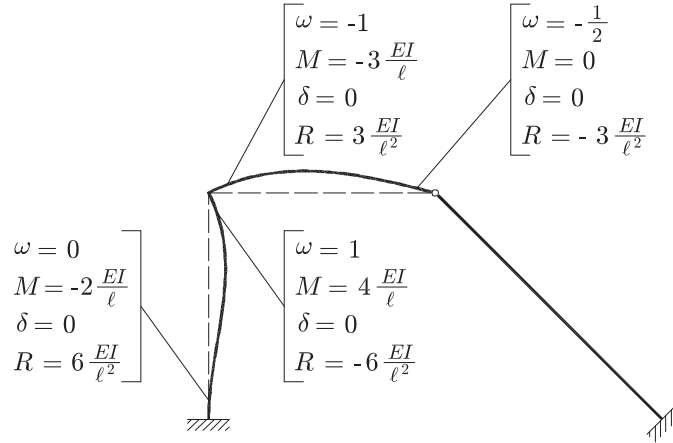
Figur 2 viser deformationer og kræfter for  $\zeta_1 = 1$ .

Ved at gange deformationer og kræfter sammen fra ' $\zeta_1 = 1$ '-tilstanden findes  $Z_1^1$ .

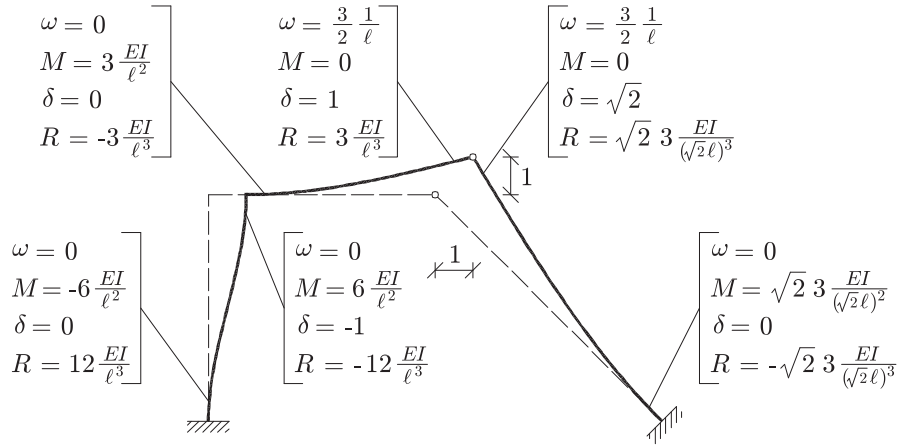
$$Z_1^1 = 1 \cdot 4 \frac{EI}{\ell} + (-1) \left(-3 \frac{EI}{\ell}\right) = 7 \frac{EI}{\ell} \quad (1)$$



Figur 1: Konstruktion med de valgte overtallige



Figur 2: Deformationsfigur for  $\zeta_1 = 1$



Figur 3: Deformationsfigur for  $\zeta_2 = 1$

Det bemærkes at  $Z_1^1$  består af 2 positive bidrag fra henholdsvis bjælke  $AB$  og  $BC$ .

Figur 3 viser deformationer og kræfter for  $\zeta_2 = 1$ .

Ved at gange deformationer og kræfter sammen fra ' $\zeta_2 = 1$ '-tilstanden findes  $Z_2^2$ .

$$Z_2^2 = -1 \left( -12 \frac{EI}{\ell^3} \right) + 1 \cdot 3 \frac{EI}{\ell^3} + \sqrt{2} \sqrt{2} 3 \frac{EI}{(\sqrt{2}\ell)^3} \cong 17.12 \frac{EI}{\ell^3} \quad (2)$$

hvor det ses, at  $Z_2^2$  består af 3 positive bidrag, et fra hver bjælkedel.

Koblingen mellem de overtallige  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$ ,  $Z_1^2$ , findes ved at gange deformationerne fra ' $\zeta_1 = 1$ '-tilstanden sammen med kræfterne fra ' $\zeta_2 = 1$ '-tilstanden.

$$Z_1^2 = 1 \cdot 6 \frac{EI}{\ell^2} + (-1) 3 \frac{EI}{\ell^2} = 3 \frac{EI}{\ell^2} \quad (3)$$

Som kontrol udføres den modsatte operation, hvor deformationerne fra ' $\zeta_2 = 1$ '-

tilstanden ganges sammen med kræfterne fra ' $\zeta_1 = 1$ '-tilstanden.

$$Z_2^1 = -1 \left(-6 \frac{EI}{\ell^2}\right) + 1 \left(-3 \frac{EI}{\ell^2}\right) = 3 \frac{EI}{\ell^2} \quad (4)$$

Kontrollen vil kunne fange fortegnstfejl, som ikke fanges i kontrollen af  $Z_i^i$ -koefficienterne.

Dimensionen på  $Z$ 'erne er forskellige, da der indgår en drejning og en flytning. Den letteste måde at håndtere dette på er at anvende  $\zeta_1 \ell$  som overtallig i stedet for  $\zeta_1$  samt dividere den første ligning med  $\ell$ . Hermed skal  $Z_1^1$  divideres med  $\ell^2$  og  $Z_1^2$ ,  $Z_2^1$  med  $\ell$ . Højreside elementet  $Z_1^0$  skal også divideres med  $\ell$ . I (5) er betingelsesligningerne opstillet i de nye variable.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} Z_1^1 & \frac{1}{\ell} Z_1^2 \\ \frac{1}{\ell} Z_2^1 & Z_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{1}{\ell} Z_1^0 \\ Z_2^0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Til brug for senere udregnes den inverse af den transformerede stivhedsmatrice  $\mathbf{Z}$ . For en  $2 \times 2$  matrix kan den inverse findes som:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_2^2 & -A_2^1 \\ -A_1^2 & A_1^1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

hvor determinanten  $D$  er givet ved (7).

$$D = A_1^1 \cdot A_2^2 - A_2^1 \cdot A_1^2 \quad (7)$$

Hermed kan betingelsesligningerne skrives som:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = - \frac{1}{110.84 EI} \ell^3 \begin{bmatrix} 17.12 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\ell} Z_1^0 \\ Z_2^0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

I det følgende udregnes belastningsleddet  $\mathbf{Z}^0$  for forskellige lasttilfælde, og de overtallige beregnes ud fra (8).

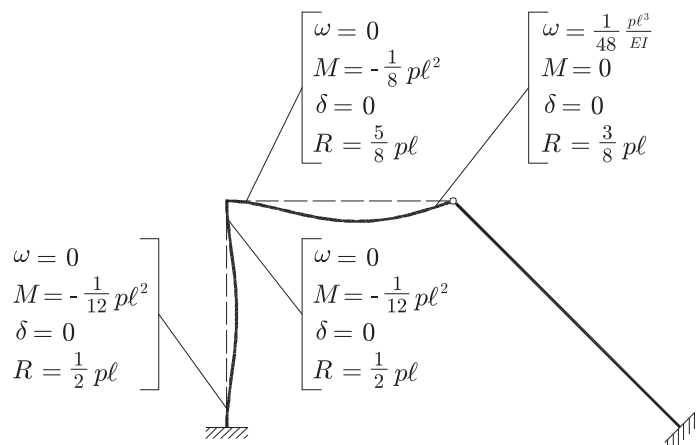
## 4.2 Statisk last

Belastningen på konstruktionen består af en fordelt last på den lodrette bjælke  $AB$  og en fordelt last på den vandrette bjælke  $BC$  som vist i Figur 1. For fastholdte deformationer findes kræfterne i de enkelte bjælkeender som vist i Figur 4.

Det ydre tvangsmoment  $Z_1^0$  findes ved at gange deformationerne fra ' $\zeta_1 = 1$ '-tilstanden, se Figur 2, sammen med kræfterne fra '0'-tilstanden.

$$Z_1^0 = 1 \left(-\frac{1}{12} p \ell^2\right) + (-1) \left(-\frac{1}{8} p \ell^2\right) = \frac{1}{24} p \ell^2 \quad (9)$$





Figur 4: Deformationsfigur for ydre last

De 2 belastninger modvirker hinanden. Da bjælke  $BC$  er simpelt understøttet i  $C$  vil den vandrette bjælke  $BC$  påvirke knude  $B$  kraftigst. Knude  $B$  vil blive påvirket til at dreje med uret, og en positiv værdi af  $Z_1^0$  vil forhindre dette.

Den ydre tvangslast  $Z_2^0$  findes ved at gange deformationerne fra ' $\zeta_2 = 1$ '-tilstanden, se Figur 3, sammen med kræfterne fra ' $0$ '-tilstanden.

$$Z_2^0 = -1 \frac{1}{2} p\ell + 1 \frac{3}{8} p\ell = -\frac{1}{8} p\ell \quad (10)$$

Forståelsen af  $Z_2^0$  kræver flere overvejelser. Den vandrette kraft  $Z_2^0$  afhænger både af den vandrette last virkende på  $AB$  og den lodrette last virkende på  $BC$ . Den vandrette lasts betydning er klar, idet  $Z_2^0$  skal forhindre vandret bevægelse af  $B$ , og det kræver en kraft af størrelse  $\frac{1}{2} p\ell$  virkende mod venstre. Bidraget fra den lodrette belastning skyldes, at punkt  $C$  kan bevæges i lodret retning. Den lodrette bevægelse af  $C$  medfører samtidig en vandret bevægelse af både  $B$  og  $C$ . Ved at påsætte en vandret kraft i  $B$  af størrelsen  $\frac{3}{8} p\ell$  virkende mod højre, frembringes en lodret opadrettet kraft i  $C$ , der netop svarer til reaktionen af den vandrette last i punkt  $C$ . Denne indirekte virkning af  $Z_2^0$  ville være vanskelig at beregne uden anvendelse af Virtuelt Arbejdes Princip, jvf. Kapitel 3.

De overtallige  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$  bestemmes af (8), og man får:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{110.84} \frac{\ell^3}{EI} \begin{bmatrix} 17.12 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\ell} \frac{1}{24} p\ell^2 \\ -\frac{1}{8} p\ell \end{Bmatrix} = \frac{p\ell^4}{EI} \begin{Bmatrix} -0.009819 \\ 0.009022 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Som forventet bevæger punkt  $B$  sig mod højre, og punkt  $C$  vil på grund af koblingen til punkt  $B$  bevæge sig både mod højre og opad. Knude  $B$  drejer sig med uret, hvilket også er forventeligt.

Ud fra de overtallige kan bøjningsmomenter og forskydningskræfter findes, jvf. (16).

$$\begin{aligned}
M_A &= -\frac{1}{12}p\ell^2 + \left(-0.009819\frac{p\ell^3}{EI}\right)\left(-2\frac{EI}{\ell}\right) + 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}\left(-6\frac{EI}{\ell^2}\right) \\
&= -0.1178p\ell^2 \\
M_{BA} &= -\frac{1}{12}p\ell^2 + \left(-0.009819\frac{p\ell^3}{EI}\right)4\frac{EI}{\ell} + 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}6\frac{EI}{\ell^2} \\
&= -0.06848p\ell^2 \\
M_{BC} &= -\frac{1}{8}p\ell^2 + \left(-0.009819\frac{p\ell^3}{EI}\right)\left(-3\frac{EI}{\ell}\right) + 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}3\frac{EI}{\ell^2} \\
&= -0.06848p\ell^2 \\
M_D &= 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}\sqrt{2}3\frac{EI}{(\sqrt{2}\ell)^2} = 0.01914p\ell^2
\end{aligned} \tag{12}$$

Momentet i  $B$  beregnes på 2 forskellige måder, og det er en god kontrol, som kan fange fejl i beregningen af den ydre last. Afrundingsfejl ved beregning af  $\zeta$ 'erne kan give mindre afvigelse.

Forskydningskræfterne kan enten beregnes ved momentligevægt af de enkelte bjælker eller ved superposition. I de senere eksempler benyttes både ligevægt og superposition, men her benyttes superposition.

$$\begin{aligned}
V_A &= \frac{1}{2}p\ell + \left(-0.009819\frac{p\ell^3}{EI}\right)6\frac{EI}{\ell^2} + 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}12\frac{EI}{\ell^3} = 0.54935p\ell \\
V_{BA} &= V_A - p\ell = -0.45065p\ell \\
V_{BC} &= \frac{5}{8}p\ell + \left(-0.009819\frac{p\ell^3}{EI}\right)3\frac{EI}{\ell^2} + 0.009022\frac{p\ell^4}{EI}\left(-3\frac{EI}{\ell^3}\right) = 0.5685p\ell \\
V_D &= -0.009022\frac{p\ell^4}{EI}\left(-\sqrt{2}3\frac{EI}{(\sqrt{2}\ell)^3}\right) = 0.0135p\ell
\end{aligned} \tag{13}$$

Normalkræfterne kan ikke findes ved superposition, da der ikke indgår aksiale deformationer. Man er derfor henvist til ligevægtsbetragtninger. Reaktionen på tværs af bjælken i  $A$  og  $D$  findes ved løsskæring af knuden, og man får:

$$\begin{aligned}
R_{AV} &= -V_A = -0.54935p\ell \\
R_{DV} &= -V_D = -0.01350p\ell
\end{aligned} \tag{14}$$

Reaktionen  $R_{DL}$  kan findes ved vandret projektion for hele konstruktionen.

$$p\ell + R_{AV} + R_{DV}\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{DL}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{DL} = 0.6238p\ell \tag{15}$$

Reaktionen  $R_{AL}$  kan findes ved lodret projektion for hele konstruktionen.

$$-p\ell + R_{AL} + R_{DV} \frac{\sqrt{2}}{2} + R_{DL} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AL} = 0.5685p\ell \quad (16)$$

Som kontrol kan der lægges et snit gennem bjælke  $BC$  ved punkt  $B$ . Ligevægt af den venstre del medfører, at  $R_{AL} = V_{BC}$ , hvilket er opfyldt.

Normalkræfterne i bjælkerne kan nu findes umiddelbart.

$$\begin{aligned} N_{AB} &= -R_{AL} = -0.5685p\ell \\ N_{BC} &= -R_{AV} - p\ell = -0.45065p\ell \\ N_{CD} &= -R_{DL} = -0.6238p\ell \end{aligned} \quad (17)$$

Det maksimale positive moment på bjælken  $AB$  findes, hvor  $V = 0$ . Det er i afstanden  $0.54935\ell$  fra  $A$ . Ved at lægge et snit gennem punktet, og tage moment om  $A$  for den nederste del findes:

$$M_{max} = \frac{1}{2}(0.54935\ell)^2 p + M_A = 0.0331p\ell^2 \quad (18)$$

Det maksimale positive moment på bjælken  $BC$  findes, hvor  $V = 0$ . Det er i afstanden  $0.5685\ell$  fra  $B$ . Ved at lægge et snit gennem punktet, og tage moment om  $C$  for den højre del findes:

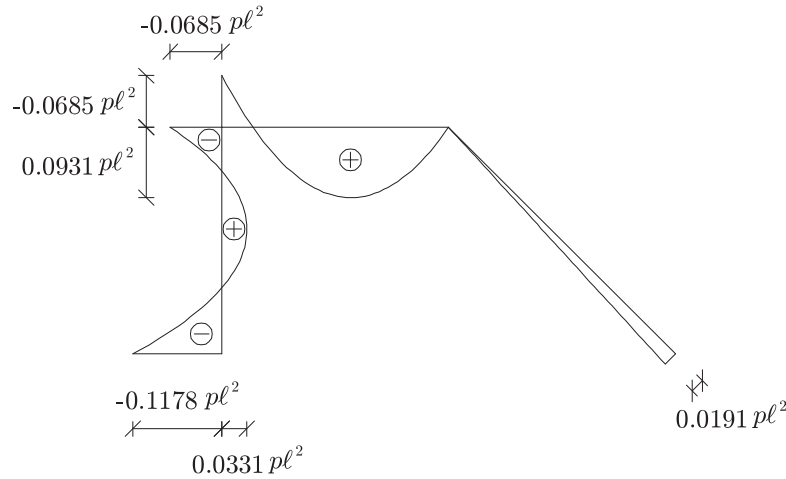
$$M_{max} = \frac{1}{2}(1 - 0.5685\ell)^2 p = 0.09310p\ell^2 \quad (19)$$

Momentfordelingen kan ses i Figur 5. Momentkurverne på bjælkerne  $AB$  og  $BC$  har den forventede form med negative indspændingsmomenter og et positivt moment på midten. Bjælke  $AB$ 's positive moment er relativt lille, hvilket skyldes, at den til en vis grad virker som en udkraget bjælke. Momentfordelingen i  $CD$  skyldes understøtningen af bjælke  $BC$ .

### 4.3 Temperaturlast

Konstruktioner kan være udsat for temperaturændringer, som medfører dimensionsændringer. I en statisk bestemt konstruktion vil dimensionsændringer ikke påvirke spændingerne i konstruktionen men blot give flytninger. I en statisk ubestemt konstruktion vil dimensionsændringer derimod kunne give betydelige spændingsændringer, og som eksempel kan nævnes broer, hvor dilatationsfuger forhindrer store aksiale kræfter fra en forlængelse eller forkortelse af brodrageren.

I dette afsnit behandles dels en homogen temperaturændring over hele bjælkeelementets tværsnit og dels en temperaturgradient over tværsnittet som resulterer i en krumning af bjælkeelementet. De 2 påvirkninger behandles separat for at bevare



Figur 5: Resulterende momentkurve for statisk last

overskueligheden, men i eksemplet ville det være mere realistisk med en kombination af de 2 belastninger. V.h.a. superpositionsprincippet kan bidragene kombineres sammen eventuelt med en statisk lastkomponent.

Størrelsen af temperaturpåvirkninger afhænger bl.a. af materialets temperaturudvidelseskoefficient, som er tøjningsændringen per grad Celcius. I det følgende betegnes den  $\beta$ , og da en tøjning er dimensionsløs har  $\beta$  altså enheden  $Celcius^{-1}$ .

#### 4.3.1 Temperatur gradient over tværsnit - Krumningsændringer

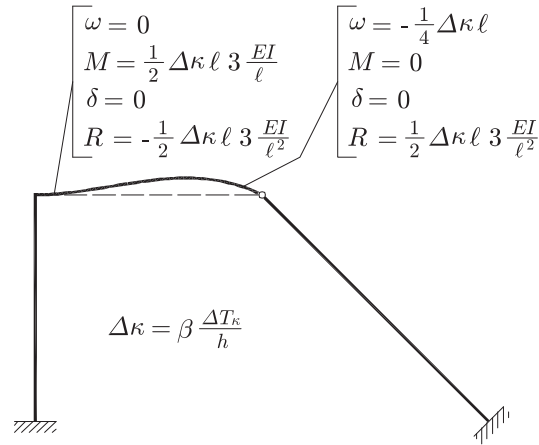
Temperaturbelastningen består af en opvarmning af bjælke  $BC$ 's overside på  $\frac{1}{2}\Delta T_\kappa$  og en tilsvarende nedkøling af undersiden. Da middelværdien af temperaturændringen er 0, får tværsnittet ingen aksiale ændringer. Da oversiden bliver længere og undersiden kortere vil bjælken krumme opad, og krumningen ændres således  $\Delta\kappa = \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h}$ , hvor  $h$  er tværsnitshøjden. Hvis bjælkeenderne er forhindret i at rotere vil der opstå spændinger i bjælken, og i Appendiks A findes nogle standardtilfælde. For fastholdte deformationer findes kræfterne i de enkelte bjælkeender som vist i Figur 6.

Belastningsleddet  $Z^0$  findes ved at gange kræfterne fra Figur 6 sammen med deformationerne fra henholdsvis ' $\zeta_1 = 1$ '- og ' $\zeta_2 = 1$ '-tilstanden.

$$\begin{aligned} Z_1^0 &= -1 \frac{1}{2} \Delta\kappa 3EI \\ Z_2^0 &= 1 \frac{1}{2} \Delta\kappa \frac{3EI}{\ell} \end{aligned} \quad (20)$$

Ved at indsætte belastningen,  $Z^0$  i (8) findes de overtallige  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$ .

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \Delta\kappa \ell^2 \begin{Bmatrix} 0.2723 \\ -0.1353 \end{Bmatrix} \quad (21)$$



Figur 6: Deformationer og kræfter for konstruktion med krumningsændring

Da bjælke  $BC$  vil krumme opad, drejes knude B mod uret. Konstruktionen flytter sig mod venstre, da bjælke  $AB$  påvirkes at et moment mod uret fra bjælke  $BC$ , og da bjælke  $CD$  er mindre stiv end bjælke  $AB$ .

Bøjningsmomenterne findes tilsvarende (12)

$$\begin{aligned}
 M_A &= 0.2723 \Delta\kappa \ell \left(-2 \frac{EI}{\ell}\right) + (-0.1356 \Delta\kappa \ell^2) \left(-6 \frac{EI}{\ell^2}\right) \\
 &= 0.2676 \Delta\kappa EI \\
 M_{BA} &= 0.2723 \Delta\kappa \ell 4 \frac{EI}{\ell} + (-0.1356 \Delta\kappa \ell^2) 6 \frac{EI}{\ell^2} \\
 &= 0.2769 \Delta\kappa EI \\
 M_{BC} &= \frac{1}{2} \Delta\kappa \ell \frac{3EI}{\ell} + 0.2723 \Delta\kappa \ell \left(-3 \frac{EI}{\ell}\right) + (-0.1356 \Delta\kappa \ell^2) 3 \frac{EI}{\ell^2} \\
 &= 0.2772 \Delta\kappa EI \\
 M_D &= (-0.1356 \Delta\kappa \ell^2) \sqrt{2} 3 \frac{EI}{(\sqrt{2}\ell)^2} = -0.2871 \Delta\kappa EI
 \end{aligned} \tag{22}$$

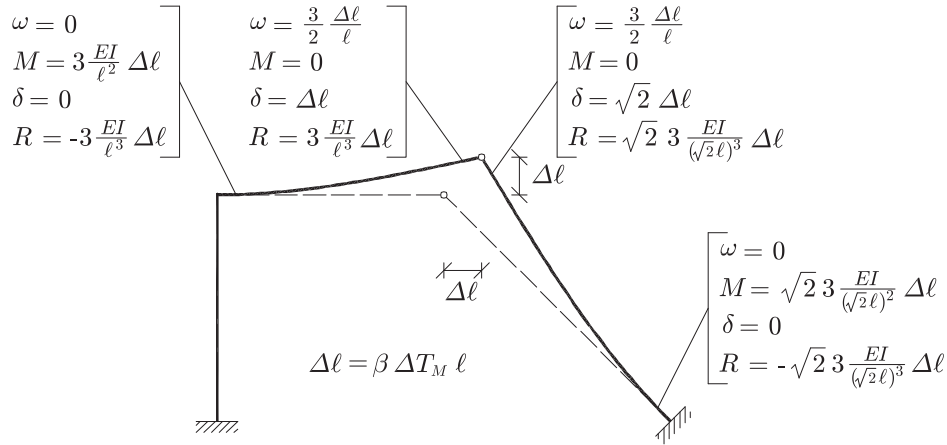
Afvigelsen mellem  $M_{BA}$  og  $M_{BC}$  skyldes afrundingsfejl. Bestemmelsen af de resterende snitkræfter og reaktioner følger metoden brugt ved den statiske last, og resultaterne er givet i nedenstående øvelse.

### Øvelse 1

Bestem reaktionerne  $R_{AV}$  og  $R_{DV}$  ved hjælp af ligevægtsligninger for henholdsvis bjælke  $AB$  og  $CD$ , og vis de er givet ved  $R_{AV} = -0.0093 \Delta\kappa \frac{EI}{\ell}$ ,  $R_{DV} = 0.2030 \Delta\kappa \frac{EI}{\ell}$ .

### Øvelse 2

Vis at  $N_{AB} = 0.2778 \Delta\kappa \frac{EI}{\ell}$ ,  $N_{BC} = 0.0093 \Delta\kappa \frac{EI}{\ell}$  og  $N_{CD} = -0.2030 \Delta\kappa \frac{EI}{\ell}$ .



Figur 7: Deformationer og kræfter for konstruktion med axialforlængelse

### Øvelse 3

Optegn deformationsfiguren og forklar hvorfor der er træk i bjælke  $BC$  og tryk i bjælke  $CD$ .

#### 4.3.2 Konstant temperaturændring over tværsnit - Aksial forlængelse

Belastningen består af en homogen opvarmning  $\Delta T_M$  af bjælke  $BC$ . I fri tilstand ville bjælken forlænges  $\Delta \ell = \beta \Delta T_M \ell$  og forblive ret. For at forhindre denne forlængelse skal der indføres tvangskræfter i aksial retning af størrelse  $\beta \Delta T_M EA$ , hvor  $A$  er tværsnitsarealet. I punkt  $B$  skal tvangskraften virke mod højre og i punkt  $C$  mod venstre. For direkte at kunne behandle denne belastning kræves, at der tages hensyn til bjælke  $BC$ 's aksiale stivhed. Hvis stivheden af bjælke  $BC$  regnes uendelig, vil de 2 tvangskræfter ophæve hinanden uden at påvirke bjælkerne  $AB$  og  $CD$ . Kraftfordelingen i systemet afhænger primært af forholdet mellem bøjningsstivheden af  $AB$  og  $BC$  og derudover af den aksiale stivhed af  $BC$ .

En anden måde at opfatte forlængelsen af  $BC$  på er illustreret i Figur 7. Forudsætningen er ustrækkelighed i aksial retning svarende til et meget stort tværsnitsareal af  $BC$ . I figuren forudsættes punkt  $B$  fastholdt mod både flytning og drejning. Idet bjælke  $BC$  forlænges tvinges punkt  $C$  skråt op mod højre for at kunne bevare  $CD$  ustrækkelig, jvf. deformationsfiguren i Figur 7. På grund af  $C$ 's flytning kommer der bøjningsmomenter i bjælkerne  $BC$  og  $CD$ . Kræfterne i bjælkeenderne er optegnet på figuren og indgår i beregningen af belastningsleddet.

Belastningsleddet  $Z^0$  findes ved at gange kræfterne fra Figur 7 sammen deformationerne fra henholdsvis ' $\zeta_1 = 1$ '- og ' $\zeta_2 = 1$ '-tilstanden.

$$\begin{aligned}
 Z_1^0 &= -1 \Delta \ell \frac{3EI}{\ell^2} \\
 Z_2^0 &= 1 \Delta \ell \frac{3EI}{\ell^3} + \sqrt{2} \sqrt{2} \Delta \ell \frac{3EI}{(\sqrt{2}\ell)^3} = 5.1213 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Ved at indsætte belastningen,  $\mathbf{Z}^0$  i (8) findes de overtallige  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$ .

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \Delta \ell \begin{Bmatrix} 0.6020 \\ -0.4046 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Punkt  $C$ 's flytninger beregnes ud fra punkt  $B$ 's flytninger, idet flytningerne i '0'-tilstanden også skal medtages. I (25) betegner  $u_C$  den skrå flytning af  $C$  regnet positiv opad.

$$u_C = \Delta \ell + \zeta_2 = 0.5954 \Delta \ell \quad (25)$$

Som forventet flytter punkt  $B$  sig mod venstre og punkt  $C$  mod højre. Da bjælke  $AB$  er stivere end bjælke  $CD$  flyttes punkt  $C$  mest. Drejningen af  $B$  er positiv, og den er et resultat af at  $B$  flyttes mod venstre. I modsætning til lasten fra temperaturgradienten afhænger resultatet ikke af tværsnitshøjden, og tværsnitsarealet af  $BC$  indgår ikke, da  $BC$  regnes ustrækkelig. Hensyntagen til sammentrykkelighed af  $BC$  ville betyde, at  $AB$  ville blive trykket sammen, og punkt  $B$  og  $C$  ville få mindre flytninger.

Bøjningsmomenterne findes tilsvarende (12).

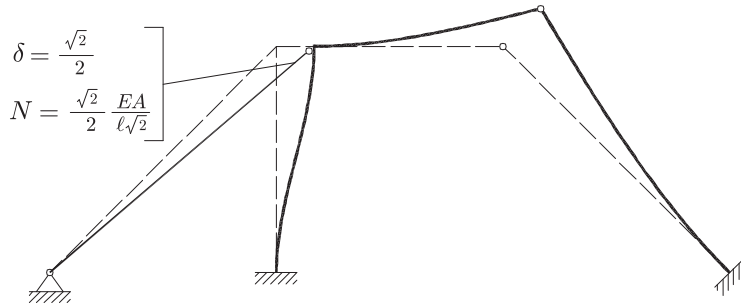
$$\begin{aligned} M_A &= 0.6020 \frac{\Delta \ell}{\ell} \left(-2 \frac{EI}{\ell}\right) + (-0.4046 \Delta \ell) \left(-6 \frac{EI}{\ell^2}\right) \\ &= 1.2236 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^2} \\ M_{BA} &= 0.6020 \frac{\Delta \ell}{\ell} 4 \frac{EI}{\ell} + (-0.4046 \Delta \ell) 6 \frac{EI}{\ell^2} \\ &= -0.0196 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^2} \\ M_{BC} &= 3 \frac{EI}{\ell^2} \Delta \ell + 0.6020 \frac{\Delta \ell}{\ell} \left(-3 \frac{EI}{\ell}\right) + (-0.4046 \Delta \ell) 3 \frac{EI}{\ell^2} \\ &= -0.0198 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^2} \\ M_D &= (-0.4046 \Delta \ell) \sqrt{2} 3 \frac{EI}{(\sqrt{2}\ell)^2} = 1.263 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Afvigelsen mellem  $M_{BA}$  og  $M_{BC}$  skyldes afrundingsfejl.

Reaktioner og normalkræfter findes tilsvarende som i lasttilfældet med temperaturgradienten. I nedenstående øvelser er resultatet vist, men selve beregningen overladt til læseren.

### Øvelse 1

Vis at  $R_{AV} = 1.2432 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$ ,  $R_{AL} = 0.0199 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$ ,  $R_{DV} = -0.8931 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$  og  $R_{DL} = 0.8650 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$ .



Figur 8: Deformationer og kræfter for konstruktion afstivet med wire

## Øvelse 2

Vis at  $N_{AB} = -0.0199 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$ ,  $N_{BC} = -1.2432 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$  og  $N_{CD} = -0.8650 \Delta \ell \frac{EI}{\ell^3}$ .  
Begrund hvorfor der kommer tryk i bjælke  $BC$ .

## Øvelse 3

Optegn deformationsfiguren og undersøg om fortegnet på bøjningsmomenterne svarer til krumningerne af bjælkerne.

## 4.4 Fjederelement - afstivning

For at øge stivheden af rammekonstruktioner kan det nogle gange være fordelagtigt at afstive med relativt slanke gitterstænger, som kan optage trækkræfter. For at illustrere princippet tilføjes konstruktionen en skrå wire som vist på Figur 8. Wiren hjælper med at fastholde punkt  $B$ . Wiren kan kun optage trækkræfter, og man må sikre sig, at ingen belastningskombination giver tryk i wiren. Hvis wiren kommer i tryk, vil den bøje ud, og konstruktionens statiske virkemåde er væsentligt anderledes. Princippet med afstivninger kan ses i store konstruktioner som skråstagsbroer og afbardedede master men anvendes også i vindgitre. Den mest effektive måde at optage kræfter på er i træk/tryk, og derfor har afstivningselementerne ofte et meget beskedent tværsnitsareal i forhold til bjælkeelementerne, der bærer lasten gennem bøjningsmomenter og forskydningskræfter.

Tværsnitsarealet af afstivning,  $A_{wire}$  vælges til at være 1 % af tværsnitsarealet af bjælkerens tværsnitsareal  $A$ . Tværsnitshøjden af bjælkerne,  $h$ , vælges til  $\frac{1}{30}\ell$ , som er en realistisk værdi. Lidt forenklet sættes  $I = A(\frac{h}{2})^2$ . Med disse forudsætninger er:

$$A_{wire} = \frac{1}{100}A = \frac{1}{100} \frac{I}{(\frac{h}{2})^2} = \frac{4}{100} \frac{I}{\ell^2 (\frac{h}{\ell})^2} = \frac{1}{25} \frac{I}{\ell^2} 30^2 = 36 \frac{I}{\ell^2} \quad (27)$$

Det eneste der ændrer sig i konstruktionens stivhed er  $Z_2^2$ , og der kommer et ekstra bidrag fra wiren. Bidraget findes ved at gange aksial flytningen sammen med



aksialkraften vist i Figur 8.

$$Z_2^2 = 17.12 \frac{EI}{\ell^3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{\sqrt{2}\ell} = 29.85 \frac{EI}{\ell^3} \quad (28)$$

Belastningsleddet er uforandret, og  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$  findes svarende til (11).

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \ell \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{199.95} \frac{\ell^4}{(EI)^2} \begin{bmatrix} 29.85 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\ell} \frac{1}{24} p \ell^2 \\ -\frac{1}{8} p \ell \end{Bmatrix} = \frac{p \ell^4}{EI} \begin{Bmatrix} -0.008096 \\ 0.005001 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Som ventet er den største reduktion i den vandrette flytning, men drejningen reduceres også.

Normalkraften i wiren kan findes direkte, idet den ikke regnes ustrækkelig.

$$N_{wire} = \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{\sqrt{2}\ell} = \frac{0.005001}{2} \frac{36EI}{\sqrt{2}\ell} = 0.09 p \ell \quad (30)$$

Ca 6 % af den vandrette last tages af wiren, og denne del kan øges ved at gøre  $A_{wire}$  større.

### Øvelse 1

Vis at  $M_A = -0.09715 p \ell^2$ ,  $M_B = -0.08571 p \ell^2$  og  $M_D = 0.01061 p \ell^2$ .

### Øvelse 2

Vis at  $R_{AV} = -0.51144 p \ell$ ,  $R_{AL} = 0.6493 p \ell$ ,  $R_{DV} = -0.0075 p \ell$  og  $R_{DL} = 0.5934 p \ell$ .

### Øvelse 3

Vis at maksimalmomentet på  $AB$  er  $0.03363 p \ell^2$  og på  $BC$  er  $0.0858 p \ell^2$ , og skitser momentkurven.

### Øvelse 4

Vis at normalkræfterne i  $AB$  er  $-0.6493 p \ell$ , i  $BC$  er  $-0.4249 p \ell$  og i  $CD$  er  $-0.5934 p \ell$ . Hvorfor er normalkraften i  $AB$  blevet større i forhold til (17)?

## Spændingsberegning

Den maksimale bøjningsspænding i bjælkerne er givet ved:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}| \frac{h}{2}}{I} = \frac{0.09715 p \ell^2}{A \frac{h}{2}} \quad (31)$$

Den maksimale spænding i wiren kan udtrykkes ved hjælp af den maksimale bøjningsspænding i bjælkerne som:

$$\sigma_{wire} = \frac{N_{wire}}{A_{wire}} = \frac{0.09p\ell}{A_{wire}} = 100 \frac{0.09p\ell}{A} = 100 \frac{h}{2\ell} \frac{0.09p\ell^2}{A \frac{h}{2}} = 1.38\sigma_{max} \quad (32)$$

### Øvelse 5

Vis at spændingen i wiren bliver 73 % af den maksimale bøjningsspænding i konstruktionen, hvis tværsnitsarealet af wiren vælges til 2 % af bjælkernes tværsnitsareal.

### Øvelse 6

I stedet for at øge tværsnitsarealet er der et forslag om i stedet at flytte wizens fastgørelsespunkt længere mod venstre for at få et mere vandret træk.

Er forslaget fornuftigt, og hvad er den optimale placering?

Svar: Ja det virker, og understøtningen placeres  $\sqrt{2}\ell$  fra  $A$ , men stivheden bliver kun knap 9 % højere end før ( $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cong 1.089$ ).

Et andet svar: Nej, placeringen er optimal, når stivheden sammenlignes med materialeforbruget.

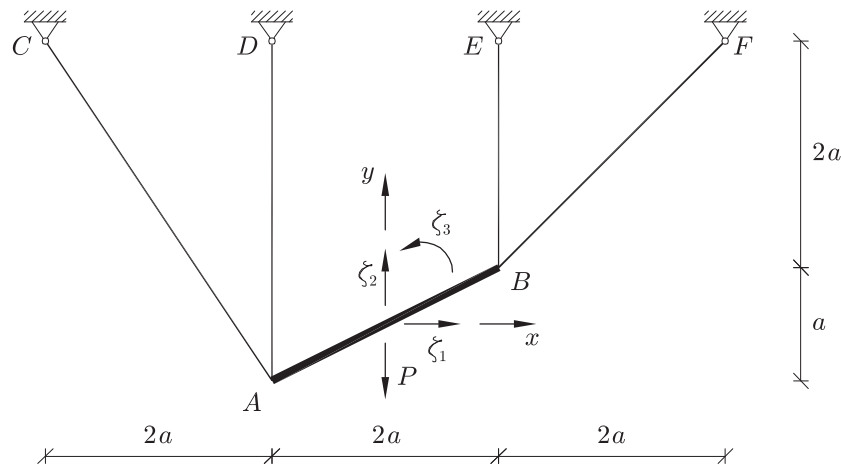


## Kapitel 5

### Eksempel - plan gitterkonstruktion

Mere traditionelle statisk ubestemte gitterkonstruktioner medfører et meget stort antal flytningsovertallige jævnt f.eks. Figur 11 i Kapitel 2. Kraftmetoden vil her ofte være mere bekvem, da graden af statisk ubestemthed er lille, og da bestemmelsen af fleksibilitetskoefficienterne ( $\delta_i^j$ ) er relativ enkel.

Et lidt mere utraditionelt eksempel er vist i Figur 1. Konstruktionen  $AB$  er hængt op i et loft med 4 wirer. Eksemplet kunne være hentet fra en hal, hvor der ønskes ophængt et lysanlæg i loftet. Indledningsvist antages belastningen at virke i det geometriske tyngdepunkt, og  $P$  svarer altså til  $mg$ , hvor  $m$  er konstruktionens masse og  $g$  er tyngdeaccelerationen. Da wirerne er tynde kan de kun optage trækkræfter, og vil bøje ud under trykpåvirkninger (Euler-søjler med et meget stort slankhedstal).

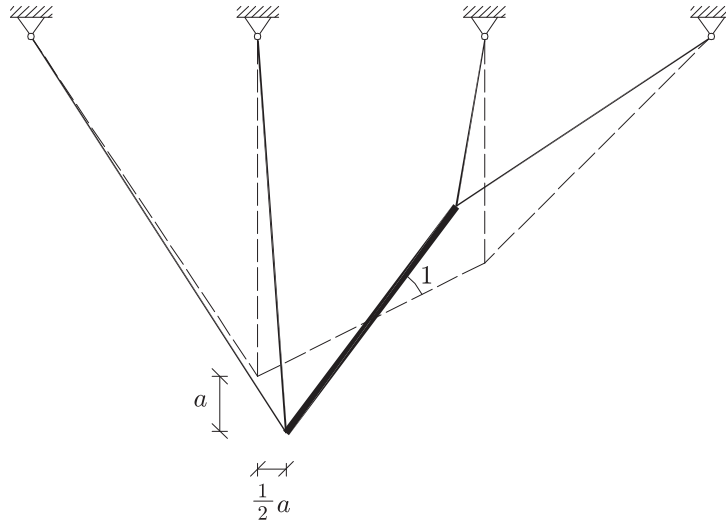


Figur 1: Konstruktion med overtallige

Bjælken  $AB$  antages at være meget stivere end resten af konstruktionen, og bevægelsen af  $AB$  kan derfor udtrykkes ved de 2 flytninger  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$  og drejningen  $\zeta_3$  svarende til, at bjælke  $AB$  kun kan bevæges som et stift legeme.

## 5.1 Konstruktionens stivhed

For elementartilfældene  $\zeta_1 = 1$  og  $\zeta_2 = 1$  findes flytninger i punkt  $A$  og  $B$  direkte, og resultaterne kan ses i Tabel 1 og 2. For elementartilfældet  $\zeta_3 = 1$  skal drejningen oversættes til flytninger i  $A$  og  $B$ , og dette er vist i Figur 2, og resultaterne kan ses i Tabel 3.



Figur 2: Elementartilfældet  $\zeta_3 = 1$

For at finde den aksiale flytning,  $u_a$ , skal flytningsvektoren  $(u_x, u_y)$  projiceres ind på bjælkeaksen. Enhedsretningsvektoren for de enkelte stangelementer er vist i (1).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AC} &= \left( \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right) \\ \mathbf{r}_{AD} &= (0, -1) \\ \mathbf{r}_{BE} &= (0, -1) \\ \mathbf{r}_{BF} &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Den aksiale flytning  $u_a$  er givet ved:

$$u_a = \mathbf{r} \cdot (u_x, u_y) \tag{2}$$

og i Tabel 1-3 findes resultaterne.

Normalkraften findes som

$$N = \varepsilon EA = \frac{u_a}{\ell} EA \tag{3}$$

hvor  $\ell$  er længden af stangen. Normalkræfterne kan også findes i Tabel 1-3.

Bjælke	$u_x$	$u_y$	$u_a$	$N$
$AC$	1	0	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a}$
$AD$	1	0	0	0
$BE$	1	0	0	0
$BF$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}$

Tabel 1:  $\zeta_1 = 1$ : Flytning/normalkraft i bjælkeenden

$Z_1^1$  findes ved at gange flytninger og kræfter sammen fra Tabel 1.

$$Z_1^1 = \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\right) = 0.2621 \frac{EA}{a} \quad (4)$$

som forventet består  $Z_1^1$  af 2 positive bidrag fra henholdsvis stang  $AC$  og  $BF$ .

Bjælke	$u_x$	$u_y$	$u_a$	$N$
$AC$	0	1	$-\frac{3}{\sqrt{13}}$	$-\frac{3}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a}$
$AD$	0	1	-1	$-\frac{EA}{3a}$
$BE$	0	1	-1	$-\frac{EA}{2a}$
$BF$	0	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}$

Tabel 2:  $\zeta_2 = 1$ : Flytning/normalkraft i bjælkeenden

Tilsvarende findes  $Z_2^2$  ud fra Tabel 2:

$$Z_2^2 = -\frac{3}{\sqrt{13}} \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a}\right) + (-1) \left(-\frac{EA}{3a}\right) + (-1) \left(-\frac{EA}{2a}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\right) = 1.2021 \frac{EA}{a} \quad (5)$$

I dette tilfælde fås positive bidrag fra alle stænger.

Bjælke	$u_x$	$u_y$	$u_a$	$N$
$AC$	$\frac{a}{2}$	$-a$	$\frac{4a}{\sqrt{13}}$	$\frac{4a}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a}$
$AD$	$\frac{a}{2}$	$-a$	$a$	$\frac{aEA}{3a}$
$BE$	$-\frac{a}{2}$	$a$	$-a$	$-\frac{aEA}{2a}$
$BF$	$-\frac{a}{2}$	$a$	$-\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}$

Tabel 3:  $\zeta_3 = 1$ : Flytning/normalkraft i bjælkeenden

$Z_3^3$  udregnes ud fra Tabel 3

$$Z_3^3 = \frac{4a}{\sqrt{13}} \frac{4a}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a} + a \frac{aEA}{3a} + (-a) \left(-\frac{aEA}{2a}\right) + \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\right) = 1.2189EAa \quad (6)$$

Der er igen positive bidrag fra alle 4 stænger. Enheden på  $Z_3^3$  svarer som ventet til et moment, medens enheden på  $Z_1^1$  og  $Z_2^2$  er  $\frac{N}{m}$ , hvilket skyldes at  $\zeta_1$  og  $\zeta_2$  er dimensionsløse, jvf. tidligere.

Koblingerne  $Z_1^2$ ,  $Z_1^3$  og  $Z_2^3$  mellem de 3 overtallige findes som sædvanligt ved at gange flytninger og kræfter sammen. Kontrol af symmetri  $Z_i^j = Z_j^i$  bør udføres, men er ikke vist her.

$$\begin{aligned}
Z_1^2 &= \frac{2}{\sqrt{13}} \left( -\frac{3}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a} \right) + \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \right) = 0.0488 \frac{EA}{a} \\
Z_1^3 &= \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{4}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a} + \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( -\frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \right) = 0.2591 EA \\
Z_2^3 &= \frac{4}{\sqrt{13}} \left( -\frac{3}{\sqrt{13}} \frac{EA}{\sqrt{13}a} \right) + 1 \left( -\frac{aEA}{3a} \right) + (-1) \left( -\frac{aEA}{2a} \right) \\
&\quad + \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( -\frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \right) = -0.00096 EA
\end{aligned} \tag{7}$$

Som ventet bliver koblingen mellem 1 og 2 ret lille, medens koblingen mellem 1 og 3 en del større. Koblingen mellem 2 og 3 bliver lille, men det er svært at vurdere på forhånd, idet der både indgår positive og negative led.

Som det er gjort tidligere anvendes drejningen gange en typisk længde,  $\zeta_3 a$ , som ubekendt, og idet ligningen for tvangsmomentet  $Z_3$  divideres med  $a$  bliver konstruktionens stivhedsrelation:

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 0.2621 & 0.0488 & 0.2591 \\ 0.0488 & 1.2021 & -0.00096 \\ 0.2591 & -0.00096 & 1.2189 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 a \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Z_1^0 \\ Z_2^0 \\ \frac{1}{a} Z_3^0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

## 5.2 Statisk last

Udregningen af  $\mathbf{Z}^0$  er enkel, idet kraften angriber direkte i knuden.

$$\begin{aligned}
Z_1^0 &= Z_3^0 = 0 \\
Z_2^0 &= P
\end{aligned} \tag{9}$$

I (10) er stivhedsrelationen inverteret, og den kan anvendes til at beregne andre lasttilfælde jævnfør øvelse 2.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 a \end{Bmatrix} &= -\frac{a}{EA} \begin{bmatrix} 4.8774 & -0.1988 & -1.0369 \\ -0.1988 & 0.8400 & 0.0429 \\ -1.0369 & 0.0429 & 1.0409 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{Pa}{EA} \begin{Bmatrix} 0.1988 \\ -0.8400 \\ -0.0429 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{10}$$

Som ventet bevæger konstruktionen sig nedad. Da stængerne i det højre ophængspunkt er kortere og dermed stivere, bevæges konstruktionen mod højre. Konstruktionen drejes med uret, og umiddelbart er det ikke indlysende, men på grund af bevægelsen mod højre strækkes de venstre stænger yderligere medens de højre trykkes sammen. For at kunne optage belastningen skal det højre punkt derfor bevæges mere nedad end det venstre, og det forklarer fortegnet.

Ud fra flytningerne bestemmes normalkræfterne i stængerne ved superpositionsprincippet.

$$\begin{aligned}
 N_{AC} &= \left( \zeta_1 \frac{2}{13} + \zeta_2 \left(-\frac{3}{13}\right) + \zeta_3 a \frac{4}{13} \right) \frac{EA}{a} = 0.211P \\
 N_{AD} &= \left( \zeta_2 \left(-\frac{1}{3}\right) + \zeta_3 a \frac{1}{3} \right) \frac{EA}{a} = 0.266P \\
 N_{BE} &= \left( \zeta_2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \zeta_3 a \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \frac{EA}{a} = 0.441P \\
 N_{BF} &= \left( \zeta_1 \left(-\frac{1}{4}\right) + \zeta_2 \left(-\frac{1}{4}\right) + \zeta_3 a \left(-\frac{1}{8}\right) \right) \frac{EA}{a} = 0.166P
 \end{aligned} \tag{11}$$

Som kontrol bestemmes den lodrette komponent af stangkræfterne,  $N_{res}$ :

$$N_{res} = N_{AC} \frac{3}{\sqrt{13}} + N_{AD} + N_{BE} + N_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.000P \tag{12}$$

Dette svarer som ventet til den ydre kraft  $P$ .

### Øvelse 1

Vis at den vandrette komponent af stangkræfterne er 0.

Alle stængerne er i træk, og forudsætningerne for at regne med at wirerne optager kræfter er derfor til stede. Hvis en wire udsættes for tryk vil den bøje ud, og ikke deltage i kraftoptagelsen.

Forudsætningen om at lasten angriber i midten bør undersøges. Kraften  $P$  gives en eccentricitet  $e$  målt vandret. Det svarer til yderligere at belaste konstruktionen med et moment af størrelse  $Pe$ .

### Øvelse 2

Vis at  $e = 0.80a$  netop medfører, at en af wirerne bliver spændingsløs.

### Øvelse 3

Vis at normalkræfterne i wirerne er uafhængige af bjælke  $AB$ 's bøjningsstivhed.





## Kapitel 6

# Eksempel - rumlig rammekonstruktion

I en rumlig rammekonstruktion kan der i de enkelte bjælkeelementer optræde bøjningsmomenter om begge hovedakser og vridning. Bøjningsproblemet vil i modsætning til det plane tilfælde omfatte 4 kræfter (2 kræfter og 2 momenter) og 4 deformationer (2 flytninger og 2 drejninger) i hver bjælkeende. Elementartilfældene fra Appendiks A kan benyttes direkte, og det er vigtigt at få orienteret bjælkens inertimomenter rigtigt (bøjning om stærk eller svag akse). Vridningsdelen kræver en drejning og et vridningsmoment i hver bjælkeende. Sammenhæng mellem vridningsmoment og vinkeldrejning er:

$$M_V = \phi \frac{GI_V}{\ell} \quad (1)$$

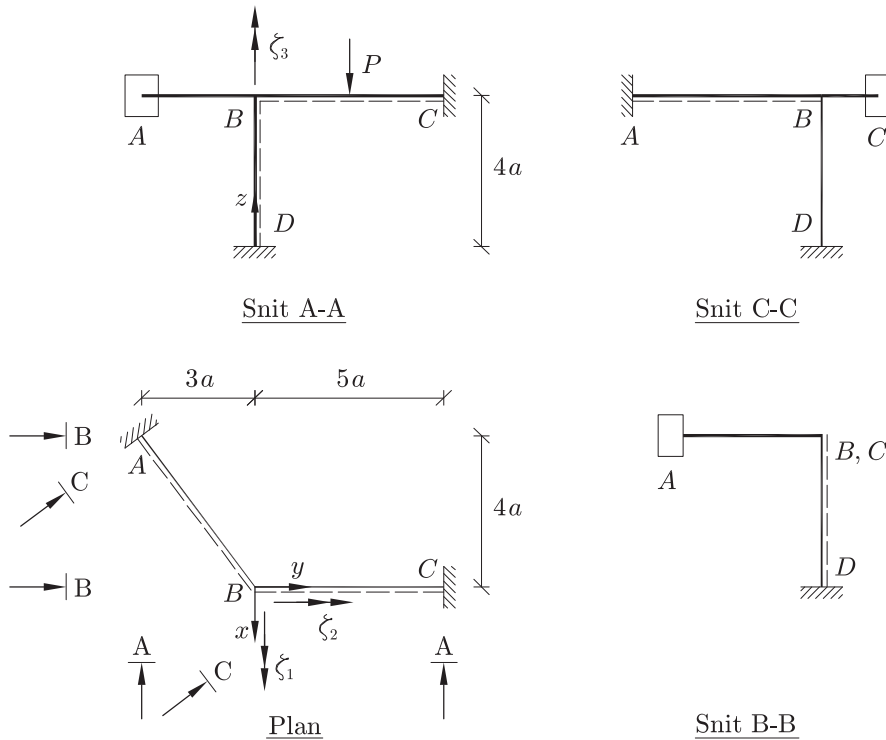
hvor  $M_V$  er det vridende moment,  $\phi$  er vinkeldrejningen,  $G$  er forskydningsmodulet,  $I_V$  er vridningsinertimomentet og  $\ell$  er bjælkens længde.

Rumlige rammekonstruktioner vil ofte kræve et stort antal deformationsovertallige, og opskrivningen af de enkelte elementartilfælde er tidskrævende, da bøjning kan foregå om 2 akser. De fleste beregninger af rumlige rammer vil derfor normalt blive lavet med et elementmetodeprogram, men det kan være nyttigt at kunne checke dele af edb-beregningen eller kunne beregne mindre systemer i forbindelse med overslagsberegninger.

### 6.1 Konstruktionens stivhed

Eksemplet er vist i Figur 1, hvor kraften  $P$  primært bæres af rammedelen  $DBC$ , som er orienteret sådan, at der primært kommer bøjning om stærk akse. Bjælke  $AB$  fastholder punkt  $B$  mod drejning. Da  $AB$  ligger skævt i forhold til rammedelen  $DBC$  vil der komme bøjningsmomenter om svag akse og vridning i elementerne.

Punktet  $B$  kan ikke bevæge sig, idet de 3 bjælker fastholder punktet, og derfor kan konstruktionen regnes med 3 drejningsovertallige i  $B$ .



Figur 1: Konstruktion med overtallige

På Figur 1 er der for de enkelte bjælker angivet underside for begge akser. Der er ikke optegnet deformationsfigurer for de 3 elementartilfælde, men resultaterne er opskrevet i Tabellerne 1-3. Da der ikke optræder flytningsovertallige, anføres kun drejninger/momenter i bjælkeenderne. Det betyder, at hvis forskydningskræfterne ønskes bestemt ved superposition må kræfterne findes for elementartilfældene.

### Øvelse 1

Optegn deformationsfigurerne for  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_2 = 1$  og  $\zeta_3 = 1$ , og kontroller fortegn og størrelse af drejningerne v.h.a. Tabel 1-3.

Bjælke	Vridning		Bøjning svag akse		Bøjning stærk akse	
	$\theta_x$	$M_V$	$\theta_y$	$M_{svag}$	$\theta_z$	$M_{stærk}$
AB	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \frac{GI_V}{5a}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a}$
BC	0	0	0	0	-1	$-\frac{4EI_{stærk}}{5a}$
DB	0	0	0	0	1	$\frac{4EI_{stærk}}{4a}$

Tabel 1:  $\zeta_1 = 1$ : Drejninger/momenter i bjælkeender

Bjælke	Vridning		Bøjning svag akse		Bøjning stærk akse	
	$\theta_x$	$M_V$	$\theta_y$	$M_{svag}$	$\theta_z$	$M_{stærk}$
AB	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \frac{GI_V}{5a}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a}$
BC	-1	$-\frac{GI_V}{5a}$	0	0	0	0
DB	0	0	-1	$-\frac{4EI_{svag}}{4a}$	0	0

Tabel 2:  $\zeta_2 = 1$ : Drejninger/momenter i bjælkeender

Bjælke	Vridning		Bøjning svag akse		Bøjning stærk akse	
	$\theta_x$	$M_V$	$\theta_y$	$M_{svag}$	$\theta_z$	$M_{stærk}$
AB	0	0	1	$\frac{4EI_{svag}}{5a}$	0	0
BC	0	0	1	$\frac{4EI_{svag}}{5a}$	0	0
DB	1	$\frac{GI_V}{4a}$	0	0	0	0

Tabel 3:  $\zeta_3 = 1$ : Drejninger/momenter i bjælkeender

## Tværsnitsdata

Tværsnittet er et firkantet rørprofil (RHS-profil) med en tværsnitshøjde  $h$ , en tværsnitbredde  $b$  og en godstykkelse  $t$ . Beregning af tværsnitskonstanter kan f.eks. ses i (Damkilde 2000). Tværsnitshøjden vælges til  $2b$ , og lidt tilnærmet findes:

$$I_{stærk} = 2 \frac{1}{12} h^3 t + 2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 b t = \frac{10}{3} b^3 t \quad (2)$$

$$I_{svag} = 2 \frac{1}{12} b^3 t + 2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 h t = \frac{7}{6} b^3 t = \frac{7}{20} I_{stærk}$$

Idet Poisson's forhold sættes til  $\nu = \frac{1}{3}$  findes  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3}{8} E$ . Formlen for  $I_V$  kan f.eks. findes i (Damkilde 2000).

$$I_V = 4 \frac{A_C^2}{\int_C t^{-1} ds} = 4 \frac{(bh)^2}{\frac{1}{t}(2b+2h)} = \frac{8}{3} b^3 t = \frac{4}{5} I_{stærk} \quad (3)$$

## Z-koefficienter

Udregning af  $Z_i^j$  sker som sædvanlig ved at gange drejninger og momenter sammen. I hver bjælkeende er der 3 drejninger, og organiseringen i tabeller er derfor mere hensigtsmæssig end optegning på en figur.

Udregningen af  $Z_1^1$  giver:

$$Z_1^1 = \frac{4}{5} \frac{4}{5} \frac{GI_V}{5a} + \frac{3}{5} \frac{3}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a} + (-1) \left(-\frac{4EI_{stærk}}{5a}\right) + 1 \frac{4EI_{stærk}}{4a} \quad (4)$$

$$= 2.1264 \frac{EI_{stærk}}{a}$$

hvor alle bidrag er positive. Bjælkerne  $DB$  og  $BC$  påvirkes til bøjning om stærk akse, mens bjælke  $AB$  får både vridning og bøjning om stærk akse.

Udregningen af  $Z_2^2$  giver:

$$\begin{aligned} Z_2^2 &= \frac{3}{5} \frac{3}{5} \frac{GI_V}{5a} + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{4}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a}\right) + (-1) \left(-\frac{GI_V}{5a}\right) + (-1) \left(-\frac{4EI_{svag}}{4a}\right) \\ &= 0.9436 \frac{EI_{stærk}}{a} \end{aligned} \quad (5)$$

hvor alle bidrag er positive. Bjælke  $AB$  får igen både vridning og bøjning om stærk akse, mens bjælke  $DB$  får bøjning om svag akse og bjælke  $BC$  vridning.

Udregningen af  $Z_3^3$  giver:

$$\begin{aligned} Z_3^3 &= 1 \frac{4EI_{svag}}{5a} + 1 \frac{4EI_{svag}}{5a} + 1 \frac{GI_V}{4a} \\ &= 0.635 \frac{EI_{stærk}}{a} \end{aligned} \quad (6)$$

hvor alle bidrag er positive. Bjælke  $AB$  og  $BC$  får bøjning om svag akse, mens bjælke  $DB$  får vridning.

Det eneste koblingsled der er forskellig fra 0 er  $Z_1^2$ :

$$Z_1^2 = \frac{4}{5} \frac{3}{5} \frac{GI_V}{5a} + \frac{3}{5} \left(-\frac{4}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a}\right) = -0.3552 \frac{EI_{stærk}}{a} \quad (7)$$

Der er bidrag fra bøjning om begge akser og vridning. Grunden til at  $Z_1^3 = Z_2^3 = 0$  er, at en drejning  $\zeta_3$  udelukkende vil give bøjning om 1 akse i  $ABC$  og ren vridning i  $DB$ .

## 6.2 Statisk last

Endekræfterne fra den ydre last er opskrevet i Tabel 4.

Bjælke	Vridning		Bøjning svag akse		Bøjning stærk akse	
	$\theta_x$	$M_V$	$\theta_y$	$M_{svag}$	$\theta_z$	$M_{stærk}$
AB	-	0	-	0	-	0
BC	-	0	-	0	0	$-\frac{5}{8}Pa$
DB	-	0	-	0	0	0

Tabel 4: Momenter i bjælkeender for ydre last

Det eneste led forskelligt fra 0 er  $Z_1^0$ .

$$Z_1^0 = -1 \left(-\frac{5}{8}Pa\right) = \frac{5}{8}Pa \quad (8)$$

Ud fra beregningen af  $\mathbf{Z}$ -koefficienterne kan betingelsesligningerne opstilles.

$$\frac{EI_{stærk}}{a} \begin{bmatrix} 2.1264 & -0.3552 & 0 \\ -0.3552 & 0.9436 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{5}{8}Pa \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Ved udregning findes drejningerne til:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa^2}{EI_{stærk}} \begin{Bmatrix} -0.3136 \\ -0.1181 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Kraften  $P$ 's primære virkning giver som ventet punkt  $B$  en drejning modsat  $\zeta_1$ 's retning. Drejningen  $\zeta_1$  modvirkes af bjælke  $AB$ , der påvirkes både til bøjning om den svage akse og vridning. Bjælke  $AB$ 's modstand bevirker, at punkt  $B$  får en negativ drejning om  $\zeta_2$ -retningen. Da der ikke er en belastning i  $\zeta_3$ -retningen, og da  $\zeta_3$  er dekoblet fra de øvrige 2 drejninger, bliver  $\zeta_3 = 0$ .

Bøjningsmomenterne og vridning i de enkelte bjælker findes ved hjælp af superpositionsprincippet.

I bjælken  $BC$  bliver der udover bøjningsmomenter om den stærke akse også vridning.

$$\begin{aligned} M_{BC}^{stærk} &= -\frac{5}{8}Pa + \zeta_1 \left( -\frac{4EI_{stærk}}{5a} \right) = -0.3741Pa \\ M_{CB}^{stærk} &= -\frac{5}{8}Pa + \zeta_1 \frac{2EI_{stærk}}{5a} = -0.7504Pa \\ M_P^{stærk} &= \frac{5}{4}Pa - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2} = 0.6878Pa \\ M_{BC}^{vridning} &= \zeta_2 \left( -\frac{GI_V}{5a} \right) = 0.007086Pa \end{aligned} \quad (11)$$

I bjælke  $AB$  bliver der bøjning om stærk akse og vridning, mens der i bjælke  $DB$  bliver bøjning om begge akser og ingen vridning.

$$\begin{aligned} M_{BA}^{stærk} &= \zeta_1 \frac{3}{5} \frac{4EI_{stærk}}{5a} + \zeta_2 \left( -\frac{4}{5} \frac{EI_{stærk}}{5a} \right) = -0.07494Pa \\ M_{BA}^{vridning} &= \zeta_1 \frac{4}{5} \frac{GI_V}{5a} + \zeta_2 \frac{3}{5} \frac{GI_V}{5a} = -0.01930Pa \\ M_{BD}^{svag} &= \zeta_2 \left( -\frac{4EI_{svag}}{4a} \right) = 0.041335Pa \end{aligned} \quad (12)$$

For at kontrollere resultaterne undersøges ligevægten af knude  $B$ . Knuden løsskæres, og momentvektorerne på de enkelte snit projiceres ind på henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retningen. Det rumlige tilfælde er noget sværere end det plane, da der skal holdes

styr på 3 retninger inklusive fortegnsgdefinition.

$$\begin{aligned}
 M_{BC}^{stærk} &= M_{BD}^{stærk} + M_{BA}^{stærk} \frac{3}{5} + M_{BA}^{vridning} \frac{4}{5} \\
 &= -0.3136Pa - 0.0450Pa - 0.01544Pa = -0.37404Pa \\
 M_{BC}^{vridning} &= -M_{BD}^{svag} + -M_{BA}^{stærk} \frac{4}{5} + M_{BA}^{vridning} \frac{3}{5} \\
 &= -0.041335Pa + 0.0600Pa - 0.01158Pa = 0.007085Pa
 \end{aligned} \tag{13}$$

De små afvigelser skyldes afrundingsfejl.

### Forenklet plan beregning

For yderligere at kunne vurdere resultaterne forenkles konstruktionen til en plan ramme ved at fjerne bjælke  $AB$ . Den plane konstruktion har kun 1 drejningsover-tallig,  $\zeta_1$ , og man må forvente, at drejningen i den plane model bliver større. Udregningen af  $Z_1^1$  i (14) kan fås fra (4) ved at udelade bidrag fra bjælke  $AB$  og  $Z_1^0$  er uændret.

$$\zeta_1^{plan} = -\frac{Z_1^0}{Z_1^1} = -\frac{Z_1^0}{4EI_{stærk}(\frac{1}{4a} + \frac{1}{5a})} = -0.3472 \frac{Pa^2}{EI_{stærk}} \tag{14}$$

Bøjningsmomenterne i  $B$  og  $C$  udregnes ud fra superpositionsprincippet, mens momentet under kraften  $P$  bestemmes ved ligevægt.

$$\begin{aligned}
 M_{BC} &= -\frac{5}{8} + \zeta_1 \left( -\frac{4EI_{stærk}}{5a} \right) = -0.3472Pa \\
 M_{CB} &= -\frac{5}{8} + \zeta_1 \frac{2EI_{stærk}}{5a} = -0.7639Pa \\
 M_P &= \frac{5}{4}Pa + \frac{(M_{BC} + M_{CB})}{2} = 0.6945Pa
 \end{aligned} \tag{15}$$

Sammenlignes bøjningsmomenterne med resultaterne i (11) ses, at momentet i  $B$  er mindre i den plane model, hvilket skyldes, at punkt  $B$  er mindre fastholdt. Når momentet i  $B$  er faldet, vil momenterne i  $C$  og under kraften stige.

Bøjningsmomenterne om stærk og svag akse kan ikke direkte sammenlignes, og derfor beregnes den maksimale spænding i tværsnittet v.h.a. Naviers formel.

$$\sigma_{max} = \frac{|M^{stærk}| \frac{h}{2}}{I_{stærk}} + \frac{|M^{svag}| \frac{h}{2}}{I_{svag}} = |M^{stærk}| \frac{3}{10} \frac{1}{b^2t} + |M^{svag}| \frac{3}{7} \frac{1}{b^2t} \tag{16}$$

Formlen viser, at et moment om svag akse giver spændinger der er  $\frac{10}{7} \cong 1.42$  gange større end det tilsvarende moment omkring stærk akse.

Vridningsmomentet giver forskydningsspændinger, og den maksimale værdi er:

$$\tau_{max} = \frac{M_V}{2bht} = M_V \frac{1}{4} \frac{1}{b^2t} \quad (17)$$

Den samlede virkning af  $\sigma$  og  $\tau$  findes ved at bestemme den ækvivalente spænding eller von Mises spændingen.

Som det vil fremgå af ovenstående er afstivningen af punkt  $B$  ved hjælp af den skrå bjælke  $AB$  ikke entydigt en fordel. Drejningen af punkt  $B$  bliver lidt mindre, og dermed er konstruktionen stivere, hvilket giver mindre nedbøjninger under kraften  $P$ . Til gengæld bliver bjælkerne påvirket til bøjning om svag akse og vridning.

### Øvelse 2

Bestem drejningerne i  $B$ , hvis kraften  $P$  ikke længere rettes nedad men efter  $x$ -aksens negative retning.

### Øvelse 3

Vis at flytningen under kraften  $P$  er givet ved  $w_P = \frac{1}{EI_{stærk}} 2.5a \frac{1}{6} (-2.5a) \cdot (2M_C + M_P)$ .

Vink: Den virtuelle kraft optages alene af indspændingen i  $C$ , og  $CB$  virker som en udkraget bjælke.





# Litteratur

- Damkilde, L. (1990). *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner*, F118, BKM, Lyngby.
- Damkilde, L. (1999). Stabilitet af rammer - deformationsmetoden, *BKM, DTU*.
- Damkilde, L. (2000). Stress and stiffness analysis of beam-sections, *BKM, DTU*.
- Damkilde, L. and Høyer, O. (1993). An efficient implementation of limit state calculations based on lower-bound solutions, *Computers & Structures* **49**(6): 953–962.
- Kassimalli, A. (1999). *Structural Analysis*, PWS Publishing.
- Teknisk Ståbi (1995). *17. udgave*, Teknisk Forlag.
- Ostenfeld, A. (1920). *Teknisk Statik I*, Gjellerup.
- Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill.



# Bilag A

## Bjælke løsninger

I dette appendix er givet de mest anvendte bjækeløsninger i deformationsmetoden. I Figur 1 er vist den anvendte fortegnsregning for momenter og reaktioner og i Figur 2 er vist den anvendte fortegnsregning for drejninger og flytninger.



Figur 1: Fortegnsregning for momenter og reaktioner



Figur 2: Fortegnsregning for drejninger og flytninger

Tabel 1: Bjælker med forskellige foreskrevne drejninger og flytninger

	$M_V = -2\frac{EI}{\ell} \quad M_H = 4\frac{EI}{\ell}$ $R_V = 6\frac{EI}{\ell^2} \quad R_H = -6\frac{EI}{\ell^2}$
	$M_H = 3\frac{EI}{\ell}$ $R_V = 3\frac{EI}{\ell^2} \quad R_H = -3\frac{EI}{\ell^2}$
	$M_V = 6\frac{EI}{\ell^2} \quad M_H = -6\frac{EI}{\ell^2}$ $R_V = -12\frac{EI}{\ell^3} \quad R_H = 12\frac{EI}{\ell^3}$
	$M_H = -3\frac{EI}{\ell^2}$ $R_V = -3\frac{EI}{\ell^3} \quad R_H = 3\frac{EI}{\ell^3}$

Tabel 2: Bjælker med forskellige belastninger

	$M_V = -\frac{1}{12}p\ell^2 \quad M_H = -\frac{1}{12}p\ell^2$ $R_V = \frac{1}{2}p\ell \quad R_H = \frac{1}{2}p\ell$
	$M_H = -\frac{1}{8}p\ell^2$ $R_V = \frac{3}{8}p\ell \quad R_H = \frac{5}{8}p\ell$
	$M_V = -\frac{1}{8}P\ell \quad M_H = -\frac{1}{8}P\ell$ $R_V = \frac{1}{2}P \quad R_H = \frac{1}{2}P$
	$M_H = -\frac{3}{16}P\ell$ $R_V = \frac{5}{16}P \quad R_H = \frac{11}{16}P$

Tabel 3: Bjælker med temperatur belastninger

<p> <math>\Delta T = +\frac{1}{2} \Delta T_\kappa</math>  <math>\Delta T = -\frac{1}{2} \Delta T_\kappa</math>  <math>\ell</math>  <math>\oplus</math> (M)         </p>	$M_V = \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h} EI \quad M_H = \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h} EI$ $R_V = 0 \quad R_H = 0$
<p> <math>\Delta T = +\frac{1}{2} \Delta T_\kappa</math>  <math>\Delta T = -\frac{1}{2} \Delta T_\kappa</math>  <math>\ell</math>  <math>\oplus</math> (M)         </p>	$M_H = \frac{3}{2} \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h} EI$ $R_V = \frac{3}{2} \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h} \frac{EI}{\ell} \quad R_H = -\frac{3}{2} \beta \frac{\Delta T_\kappa}{h} \frac{EI}{\ell}$