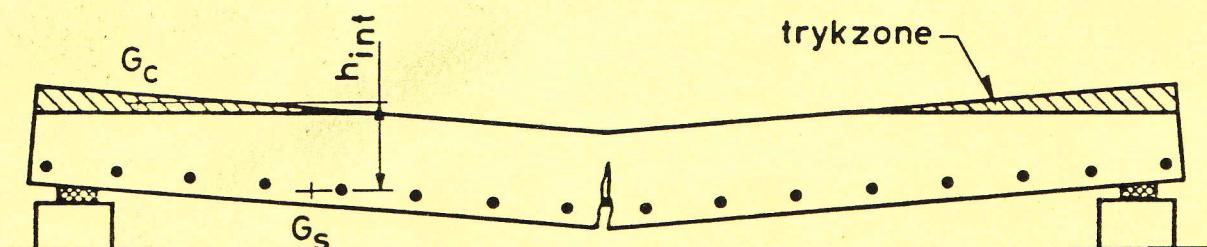
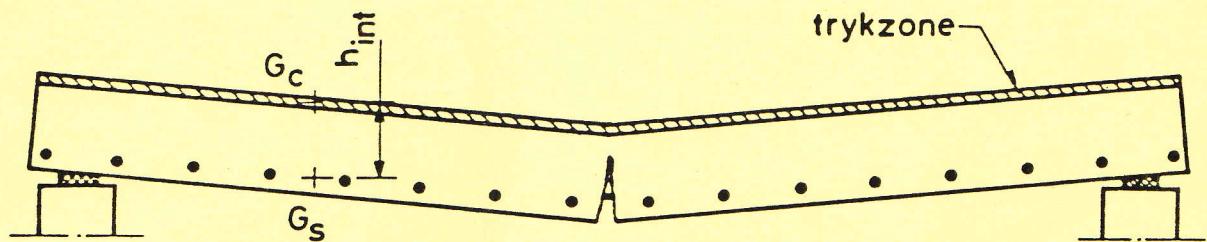


# ARMEREDE BETONPLADER

Knud Christiansen



## ARMEREDE BETONPLADER

Knud Christiansen

### FORORD

Denne bog indgår i undervisningsmaterialet for grundkurset KRAM 41 "Betonkonstruktioner" på DIAB og omfatter dimensionering af betonplader ved hjælp af  
brudlinieteori,

normens nedreværldiløsning og  
strimmelmetoden.

Bogen har desuden et afsnit om trykmembranvirkning med en teoretisk og empirisk begrundet metode til beregning af bæreevneforøgelsen. Derimod indeholder afsnittet om den på forsiden viste Kempeffekt ikke en praktisk anvendelig beregningsmetode, men det kommer forhåbentlig i næste udgave.

Iovrigt er hovedvægten lagt på forståelsen af de elementære principper og på at sætte læserne i stand til at dimensionere betonplader i praksis, dvs. i overensstemmelse med normen for betonkonstruktioner.

Da de fleste af de bøger og artikler, som der henvises til i denne bog, er på det internationale tekniske sprog engelsk, har jeg medtaget en lille engelsk-dansk beton-teknisk ordbog side 56-58.

I kurset "Betonkonstruktioner" anvendes desuden bøgerne "Armerede betonbjælker" 3. udgave 1992 og "Armerede betonsøjler" 2. udgave 1992 af samme forfatter og Anker Stæhr-Jørgensen: "Konstruktionslære, Betonkonstruktioner" 1984.

Tekstbehandlingen er udført af Grethe Jeilman, tegningerne af Nega Beraki og trykningen af Ole Christensen. Jeg takker dem for deres hjælp.

Danmarks Ingenørakademi Bygningsafdelingen, SKM, 2. udgave 1992.

## BETONPLADER GENERELT

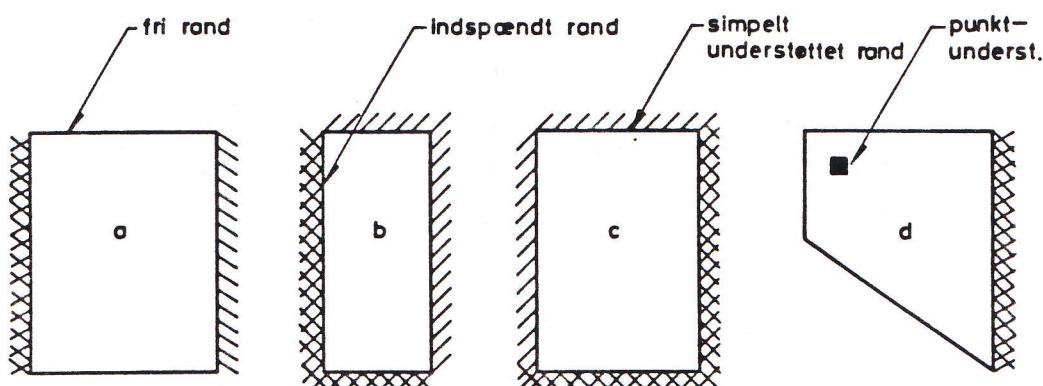
En plade er en plan konstruktionsdel, hvis ene dimension, tykkelsen, er lille i forhold til de to andre dimensioner, og hvis påvirkning består af kræfter vinkelret på dens plan. Et pladefelt er en plade eller en del af en plade, begrænset af frie rande, simpelt understøttede rande og/eller indspændte rande, se figur 1. Det er almindeligt at kalde et pladefelt en plade, og det vil også blive gjort her. En plade, som består af flere pladefelter, kaldes ofte et dæk. Man skelner mellem enkeltpændte og dobbeltspændte plader.

Enkeltpændte plader er plader, der kun er påvirket til bøjning om én akse. Denne akse er parallel med understøtningerne, se plade a i figur 1. Den enkeltpændte plade forsynes med en hovedarmering i én retning til optagelse af bøjningsmomenterne og vinkelret herpå med en armering, som kaldes fordelingsarmering.

Dobbeltpændte plader, plade c og d i figur 1, har bøjning om flere akser og forsynes ikke med fordelingsarmering, men med hovedarmering i to retninger, der normalt er vinkelret på hinanden.

Betonplader kan være massive eller, for at spare på egen vægt, være forsynet med udspæringer eller ribber. Det vil blive forudsat her, at pladerne er massive og med konstant tykkelse.

Nedbøjningsundersøgelse er ikke nødvendig, medmindre pladetykkelsen er lille i forhold til spændvidden. Betonnormen, DS 411 V6.4.3.2, anbefaler at pladetykkelsen af stivhedshensyn ikke vælges mindre end  $1/30$  af spændvidden for enkeltpændte plader og  $1/40$  af den mindste spændvidde for dobbeltspændte plader, og i øvrigt normalt ikke mindre end 80 mm.



Figur 1. Plan af plader med forskellige signaturer.

## Pladearmering

Armeringen lægges normalt i to på hinanden vinkelrette retninger, dvs. ortotrop, og enten både i under- og overside eller kun i den ene side. Det forudsættes her, at armeringen er ortotrop. De to armeringsretninger betegnes x og y, og armeringsarealerne betegnes

$A_{sx}$  og  $A_{sy}$  mm<sup>2</sup> pr. m i undersiden

$A'_{sx}$  og  $A'_{sy}$  mm<sup>2</sup> pr. m i oversiden

Et snit med snitnormal parallel med x-retningen kaldes snit x, og snit y har snitnormal parallel med y-retningen. Med dimensionerne a og d, som vist i figur 2, er antallet af stænger pr. m lig 1000/a, og armeringsarealet i undersiden i snit y er

$$A_{sy} = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{1000}{a} \text{ mm}^2 \text{ pr. m snitlængde med } a \text{ og } d \text{ i mm.}$$

Hovedarmering er, som nævnt ovenfor, armering til optagelse af bøjningsmomenter. Hovedarmeringen bør tilfredsstille kravet om minimumarmering, dvs.

$$\varphi = \frac{A_s}{1000 \cdot h_{ef}} \geq \varphi_{min} \quad \text{med } A_s \text{ i mm}^2 \text{ og } h_{ef} \text{ i mm,}$$

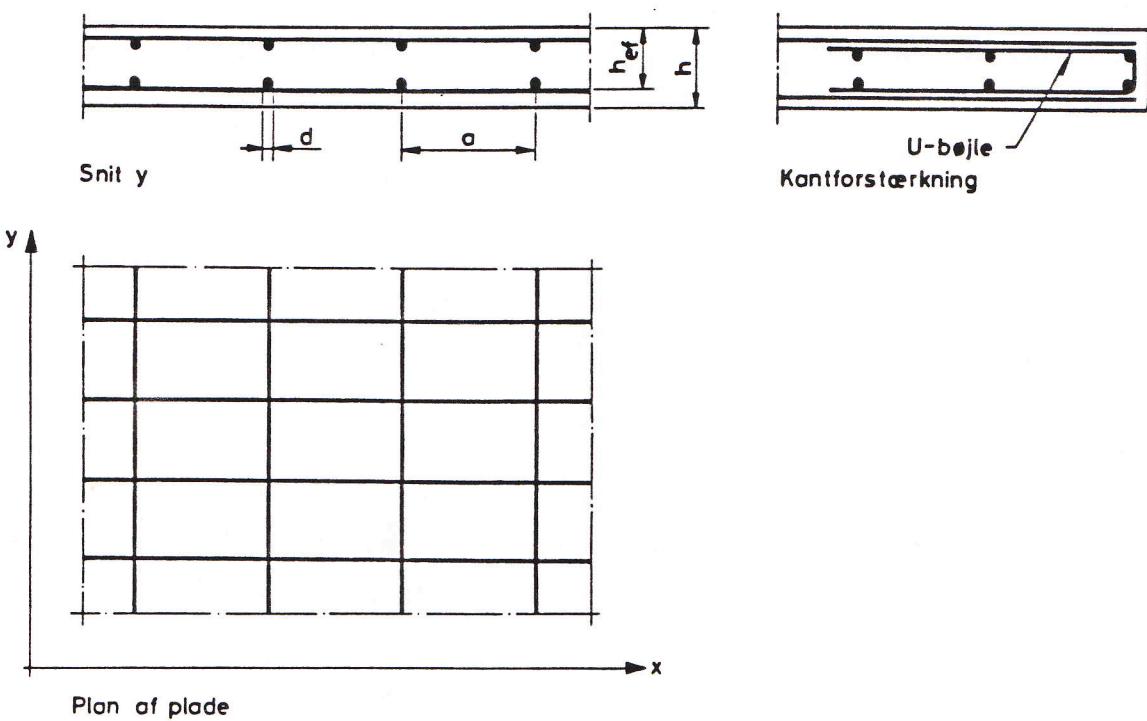
hvor  $\varphi_{min}$  kan fås fra tabel 1 i "Armerede betonbjælker".

Den effektive tværsnitshøjde  $h_{ef}$  kan for dobbeltspændte plader, dvs. plader med hovedarmering i to retninger, med god tilnærmelse regnes lige stor i de to retninger og måles da som vist i figur 2.

Fordelingsarmering, der lægges vinkelret på hovedarmeringen i enkeltpændte plader, skal kunne optage 2.ordens påvirkninger, der skyldes pladens tværudvidelse i trykzonen og tværkontraktion i trækzonen, som beskrevet af A. Stæhr-Jørgensen [1] (se litteraturfortegnelsen). Poissons forhold for beton er ca. 0,2, og  $A_s$  for fordelingsarmeringen vælges til mindst 0,2 gange  $A_s$  for hovedarmeringen. Hvis den enkeltpændte plade bliver påvirket af koncentrererde laster, hvilket kan forekomme selv om nyttelasten regnes ensformigt fordelt, vil fordelingsarmeringen kunne fordele lasten på en større pladebredde. Derfor anbefales

$$\text{fordelingsarmering} = 20 - 50 \% \text{ af hovedarmering}$$

hvor de 50% anvendes, hvis chancen for koncentrerede laster er stor. Fordelingsarmeringen behøver ikke opfylde kravet om minimumarmering.



Figur 2. Pladearmering

Dæklaget skal for plader opfylde samme krav som for bjælker. Der er dog den forskel, at der normalt ikke er bøjler i plader. For dobbeltspændte plader, hvor  $d_t = 0$ , er kravet derfor

$$\text{dæktag } c \geq \begin{cases} 20 \text{ mm for passivt miljø, incl. } 10 \text{ mm tolerance} \\ 1,5 d \end{cases}$$

For enkeltpændte plader er  $d_t$  fordelingsarmeringens stangdiameter, og lægges den i hovedarmeringens dæktag, som skal være mindst 1,5 gange hovedarmeringens stangdiameter  $d$ , bliver kravet  $c \geq 1,5d - d_t$ . Ofte lægges dog hovedarmeringen yderst for at opnå størst mulige effektiv højde  $h_{ef}$ .

Den maksimale afstand, som armeringsstængerne kan lægges med, bestemmes ifølge betonnormen ved at omkredsen af armeringsnettets masker skal være højst 10 gange pladetykkelsen og højst 1,2 m, dvs.

$$2(a_x + a_y) \leq \begin{cases} 10 h \\ 1200 \text{ mm} \end{cases}$$

Stangafstanden  $a$  måles for plader fra stangmidte til stangmidte, og altså ikke som for bjælker, hvor  $a$  er den frie afstand mellem stænger i samme lag.

Kravene til størrelse på  $a$  er stillet af hensyn til revner i betonen og faren for gennemlokning, som omtales nedenfor. Kravene kan på den sikre side og simplere skrives

$$a \leq \begin{cases} 2,5 \text{ h} \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

Pladearmeringen bør ved stød og forankring opfylde den såkaldte 55-regel (DS 411 V.6.2.6.1)  $a \leq 55 d_i^2/d$ , men den bliver sjældent aktuel. Hvis  $a \leq 300 \text{ mm}$  og  $d_i = d$ , er reglen opfyldt blot  $d_i \geq 6 \text{ mm}$ .

Kravet om mindste stangafstand for at sikre god udstøbning er også sjældent aktuel for plader, da man forøger stangdiametern, hvis beregningerne giver en så lille værdi for  $a$ , at det er upraktisk af hensyn til armeringsarbejdet, f.eks. hvis  $a < 100 \text{ mm}$ .

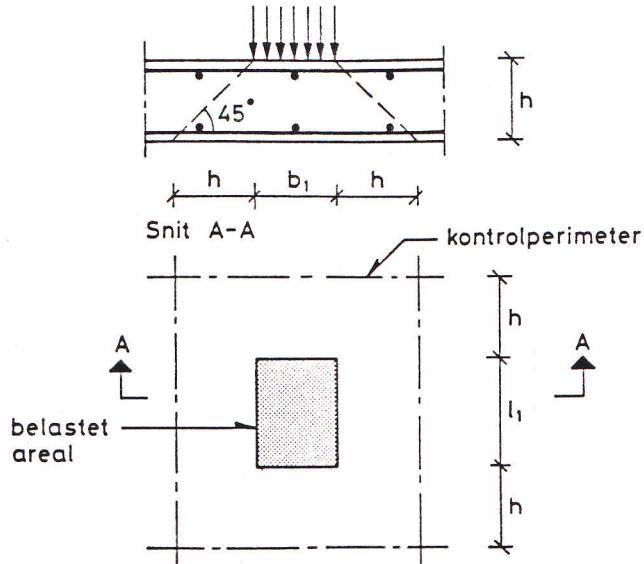
Kantforstærkning, i form af U-bøjler (se figur 2), er ofte nødvendig ved frie rande, ikke blot til forankring af stængerne vinkelret på randen, men også da der som omtalt senere kan optræde store vridningsmomenter i pladen ved frie rande.

Ved understøttede rande er det ofte også nødvendigt med en kantforstærkning i form af armeringsnet i oversiden af simpelt understøttede plader, hvis man vil undgå store revner. Ved pladehjørner optræder negative reaktioner, hvilket gør det nødvendigt at forhindre simpelt understøttede pladehjørner i at løfte sig, og oversidearmering er her særligt nødvendigt.

Forskydningsarmering i form af bøjler er meget sjældent nødvendig i massive betonplader. Man bør dog vise, at den kan undværes, dvs. at den formelle forskydningsspænding (se "Armede betonbjælker") opfylder kravet

$$\tau = \frac{r_{\max}}{h_{int}} \leq 0,7 f_{td} \quad \text{hvor } r_{\max} \text{ er største reaktion}$$

$r_{\max}$  måles i kraft pr. længdeenhed. Betonens regningsmæssige trækstyrke  $f_{td}$  findes i tabel 2 i "Armede betonbjælker". Hvis kravet ikke er opfyldt, er det mest praktisk at øge pladetykkelsen.



Plan. Armering ikke vist

**Figur 3.** Gennemlokning af last koncentreret på rektangulært areal

Ved koncentreret last på plader skal der tages hensyn til brud ved gennemlokning. Som udtryk for gennemlokningspåvirkningen af pladen bestemmes den formelle forskydningsspænding

$$\tau = \frac{V}{uh}$$

h er pladetykkelsen

u er længden af en kontrolperimeter omkring det belastede areal i afstanden h

V er den resulterende regningsmæssige last inden for kontrolperimeteren

Det skal eftervises, at den formelle forskydningsspænding opfylder betingelsen

$$\tau \leq 0,12 \upsilon f_{cd}$$

hvor  $\upsilon$  bestemmes af

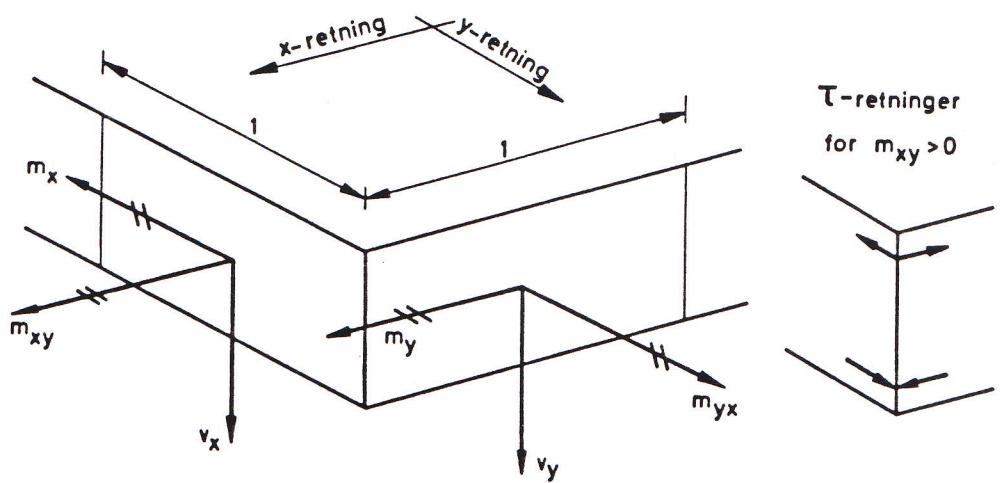
$$\upsilon = \frac{2}{\sqrt{f_{ck}}} (f_{ck} \text{ i } MN/m^2)$$

Virker lasten fjernt fra frie

rande eller huller, kan kontrolperimeteren bestemmes ved indlæggelse af planer under  $45^\circ$  med pladens plan gennem det belastede areals sidelinier til skæring med den modstående pladeside. Længden af den rektangulære kontrolperimeter bliver

$$u = 2(b_1 + l_1 + 4h)$$

Virker lasten nær frie rande eller huller, henvises til DS 411 (marts 1984), afsnit 6.2.4.2, side 48 - 50.



Figur 4. Snitkræfterne i plade.

$$\text{Vridningsmomentet } m_{yx} = -m_{xy}$$

### Snitkræfter

I skiver og plader angives snitkræfterne i moment pr. længdeenhed af snittet og i kraft pr. længdeenhed af snittet. For at vise at enhederne er anderledes end i bjælker, bruges små bogstaver, som vist i figur 4.

I plader regner man normalt kun med de tre snitkræfter, som i figur 4 er vist for snit med snitnormal i x- og y-retningerne. Plader er ikke udefra påvirket af kræfter i deres eget plan, og man regner derfor med, at der ikke inde i plader er snitkræfter af betydning i deres eget plan. Derfor ses bort fra normalkraften og den forskydningskraft, som ligger i pladens plan. Denne antagelse kan give anledning til fejl, men resultaterne er på den sikre side som vist senere i kapitlet om pladeteoriens begrænsning.

Bøjningsmomenterne  $m_x$  og  $m_y$  regnes positive for træk i pladens underside. De positive retninger for vridningsmomenterne  $m_{xy}$  og  $m_{yx}$  og for forskydningskræfterne  $v_x$  og  $v_y$  fremgår af figur 4.

Vridningsmomentet  $m_{xy}$  skyldes forskyningsspændinger, der må virke i de retninger, som er vist til højre i figur 4, hvis  $m_{xy}$  er positiv. Da forskyningsspændinger i to på hinanden vinkelrette snit som bekendt altid er lige store og har modsat fortegn, er

$$m_{yx} = -m_{xy}$$

Snitkræfterne i en plade skal iøvrigt opfylde en ligevægtsligning, som vil blive udledt senere.

## $\Phi$ -metoden til tværsnitsdimensionering

I bogen "Armerede betonbjælker" i afsnittet om dimensionering ved metode A anvendtes en fremgangsmåde, hvor man først beregnede en tilnærmet værdi for  $A_{\text{tneadv}}$ , dernæst valgte en armering, kontrollerede om  $\varphi_{\text{min}} \leq \varphi \leq \varphi_{\text{bal}}$  og beregnede bæreevnen  $M_u$ . Metoden kan også anvendes på plader.

En alternativ fremgangsmåde til dimensionering af bjælker og plader, baseret på  $\Phi$  i stedet for  $\varphi$ , vil blive beskrevet her. Benyttes de dimensionsløse størrelser

$$\mu = \frac{M_u}{bh_{\text{ef}}^2 f_{\text{cd}}} = \frac{m_u}{h_{\text{ef}}^2 f_{\text{cd}}} \text{ idet } M_u/b = m_u \text{ for plader, og}$$

$$\Phi = \frac{A_s f_{yd}}{bh_{\text{ef}} f_{\text{cd}}} = \text{mekanisk armeringsforhold*}$$

kan projektions- og momentligningen skrives enklere. For  $N=0$  og konstant trykzonebredde fås

$$\frac{4}{5} bh_c f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Rightarrow \frac{4h_c}{5h_{\text{ef}}} = \Phi$$

$$M_u = A_s f_{yd} \left( h_{\text{ef}} - \frac{2}{5} h_c \right) \Rightarrow \mu = \Phi \left( 1 - \frac{1}{2} \Phi \right)$$

$$\text{idet den indre momentarm } h_{\text{int}} = h_{\text{ef}} - \frac{2}{5} h_c = h_{\text{ef}} \left( 1 - \frac{1}{2} \Phi \right)$$

Løses den græske ligning  $\mu = \Phi \left( 1 - \frac{1}{2} \Phi \right)$  med hensyn til  $\Phi$ , fås

$$\Phi = 1 - \sqrt{1 - 2\mu}$$

At tværsnittet er normalarmeret, og at brudmomentet er større end revnemomentet, opnås for

$$\Phi_{\text{min}} \leq \Phi \leq \Phi_{\text{bal}}$$

I afsnittet om minimumarmering i "Armerede betonbjælker" fandtes  $\varphi_{\text{min}} = 0,45 f_{tk}/f_{yk}$  for rektangulære tværsnit, som også omfatter betonplader. Heraf fås

$$\Phi_{\text{min}} = \varphi_{\text{min}} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,45 \frac{f_{tk}}{f_{yk}} \cdot \frac{1,8 f_{yk}}{1,4 f_{ck}} = \frac{0,45 \cdot 1,8 \sqrt{0,1 f_{ck}}}{1,4 f_{ck}} = \frac{0,183}{\sqrt{f_{ck}}}$$

\* I Teknisk Ståbi 15. udgave er brugt  $\omega$  i stedet for  $\Phi$ .

Fra afsnittet om balancetilstand i samme bog fås

$$\Phi_{bal} = \frac{4}{5} \cdot \frac{0,0035}{0,0035 + \epsilon_y} = \frac{0,0028}{0,0035 + \epsilon_y}$$

som angiver grænsen mellem normaltarmert og overarmert brudtilstand. Overarmert brudtilstand er uhyre sjældent for betonplader, og er iøvrigt på grund af manglende flydeevne uegnet til dobbeltspændte betonplader.

$f_{ck}$	MPa	15	20	25	30	35	40	45	50
$f_{cd}$	MPa	8,3	11,1	13,9	16,7	19,4	22,2	25,0	27,8
$\Phi_{min}$		0,047	0,041	0,037	0,033	0,031	0,029	0,027	0,026

Tabel 1.  $\Phi_{min}$  for rektangulære tværsnit incl. plader for N=0 og for alle sikkerheds- og kontrolklasser. Værdierne for  $f_{cd}$  er derimod kun for  $\gamma_c = 1,8$ .

Armeringstype Symbol	Ny Tentor- stål X Y	Kamstål		Fe 360 glat	
		Ks550S Y	Ks410S S	d≤16 R	d>16 R
$f_{yk}$ MPa	550	550	410	235	225
$f_{yd}$ MPa	393	393	293	168	161
$\Phi_{bal}$	0,448	0,448	0,505	0,60	0,60

Tabel 2.  $\Phi_{bal}$  for tværsnit med konstant trykzonebredde og N=0.  $f_{yd}$  er kun for  $\gamma_s = 1,4$ .

Dimensionering af betonplader kan foregå på følgende måde.  $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$ ,  $h$  og det ønskede flydemoment  $m_u$  forudsættes kendte.

1. Armeringsdiameteren  $d$  skønnes, og  $h_{ef}$  beregnes. For dobbeltpændte plader bruges  $h_{ef} = h - c - d$ .
2.  $\mu = \frac{m_u}{h_{ef}^2 f_{cd}}$  og  $\Phi = 1 - \sqrt{1 - 2\mu}$  udregnes og  $\Phi_{min} \leq \Phi \leq \Phi_{bal}$  kontrolleres (se tabel 1 og 2).
3.  $\frac{A_s}{b} = \Phi h_{ef} \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$  beregnes i  $\text{mm}^2/\text{m}$
4. Da det nødvendige antal stænger er  $\frac{A_s}{\frac{\pi}{4} d^2 b}$  pr. m, bliver stangafstanden

$$a \leq \frac{\pi d^2 / 4}{A_s / b} \quad 1000 \text{ mm for } d \text{ i mm}$$

#### Eksempel 1. Dimensionering af armering.

En 100 mm tyk, dobbeltpændt betonplade skal forsynes med en armering, der svarer til flydemomenterne  $m_{uy} = 9,4 \cdot \text{kNm/m}$  og  $m_{ux} = 4,7 \cdot \text{kNm/m}$ . Pladen indgår i en konstruktion i normal sikkerhedsklasse og i passivt miljø. Den skal udføres i normal kontrolklasse af beton 30 med armering af tentorstål.

Armeringen skal dimensioneres.

#### Effektiv højde

Referencer      Armeringen antages at være T8.

Side 7      Dæktag  $c \geq \begin{cases} 20 \text{ mm} \\ 1,5 d = 1,5 \cdot 8 = 12 \text{ mm} \end{cases}$

Med  $c = 20 \text{ mm}$  bliver den effektive højde (middel)

$$h_{ef} = h - c - d = 100 - 20 - 8 = 72 \text{ mm}$$

### Armering i y-retning

Side 11 og  
tabel 1 og 2

$$\mu = \frac{m_{uy}}{h_{ef}^2 f_{cd}} = \frac{9,4 \cdot 10^3}{72^2 \cdot 16,7} = 0,1086$$

$$\Phi = 1 - \sqrt{1 - 2\mu} = 0,115 \quad \begin{cases} > \Phi_{min} = 0,033 \\ < \Phi_{bal} = 0,448 \end{cases}$$

dvs. normaltarmeret brudtilstand.

$$\frac{A_s}{b} = \Phi h_{ef} \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0,115 \cdot 72 \frac{16,7}{393} 10^3 = 352 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$a \leq \frac{\pi d^2 / 4}{A_s/b} 1000 = \frac{\pi 8^2 / 4}{352} 1000 = 143 \text{ mm}$$

Der lægges i y-retningen T8 pr. 140.

### Armering i x-retning

$$\mu = \frac{4,7}{9,4} 0,1086 = 0,0543$$

$$\Phi = 1 - \sqrt{1 - 2\mu} = 0,0559 \quad \begin{cases} > \Phi_{min} = 0,033 \\ < \Phi_{bal} = 0,448 \end{cases}$$

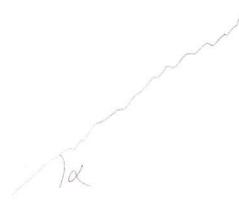
Side 11

$$\frac{A_s}{b} = \Phi h_{ef} \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0,0559 \cdot 72 \cdot \frac{16,7}{393} 10^3 = 171 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$a \leq \frac{\pi d^2 / 4}{A_s/b} 1000 = \frac{\pi 8^2 / 4}{171} 1000 = 294 \text{ mm}$$

Der lægges i x-retningen T8 pr. 290

$$\text{Netmaskens omkreds} = 2(140+290) = 860 \quad \begin{cases} < 10 h = 1000 \text{ mm} \\ < 1200 \text{ mm} \end{cases}$$



## FLYDEBETINGELSEN

For bjælker er flydebetingelsen

$$-M'_u \leq M \leq M_u$$

hvor  $M_u$  er bjælkens positive flydemoment,  $M'_u$  er numerisk værdi af det negative flydemoment, og  $M$  er momenterne i bjælken.

For plader er flydebetingelsen ikke så simpel, da der er tre momenter  $m_x$ ,  $m_y$  og  $m_{xy} = -m_{yx}$  i pladen (se figur 4), hvorimod bjælken kun har  $M$ .

Når snitkræfterne i en betonplade bliver tilstrækkeligt store, revner betonen i under- eller oversiden, og den armering, der passerer gennem en revne vil flyde. Vi vil antage, at det er i undersiden, at revnedannelsen er sket.

Har vinklen mellem revnens retning og x-retningen størrelsen  $\alpha$ , og er pladen i undersiden armeret med stænger i x-retningen med arealet  $A_{sx}$  pr. længdeenhed målt i y-retningen, vil der gennem revnelængden 1, AC i figur 5, passere armeringsarealet  $A_{sx} \sin\alpha$  i x-retningen. I y-retningen vil der passere armeringsarealet  $A_{sy} \cos\alpha$  gennem samme revnelængde. Da denne armering flyder, og da betonen er revnet, vil trækkræfterne

$$A_{sx} \sin\alpha \cdot f_y d \text{ og } A_{sy} \cos\alpha \cdot f_y d$$

være de eneste kræfter, der i pladens underside passerer revnen.

I oversiden af pladen vil der i et lodret snit gennem revnen virke en lodret forskydningskraft  $v$  og nogle vandrette kræfter. Disse vandrette kræfter regnes at virke i højden  $h_{int}$  over undersidearmeringens niveau, og de må være lige så store som og modsat rettet kræfterne i undersiden, da de samlede vandrette kræfter på snitlængden 1 skal være nul, idet snittets normalkraft og dets vandrette forskydningskraft begge er nul, se figur 4. De vandrette kræfter i oversiden danner derfor sammen med de to trækkræfter i undersiden to kraftpar, der giver de to momenter

$$A_{sx} \sin\alpha \cdot f_y d \cdot h_{int} = m_{ux} \sin\alpha$$

$$A_{sy} \cos\alpha \cdot f_y d \cdot h_{int} = m_{uy} \cos\alpha$$

hvor  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  er flydemomenterne svarende til henholdsvis  $A_{sx}$  og  $A_{sy}$ . Ses på momentligevægt af pladeelementet ABC, der på siderne AB og BC er påvirket af de i figur 4 viste snitmomenter, og regnes med at længdeenheden AC er så lille, at bidrag fra de lodrette forskydningskræfter er forsvindende, fås

$$(m_{ux} - m_x) \sin \alpha - m_{xy} \cos \alpha = 0$$

$$(m_{uy} - m_y) \cos \alpha - m_{xy} \sin \alpha = 0$$

Heraf fås

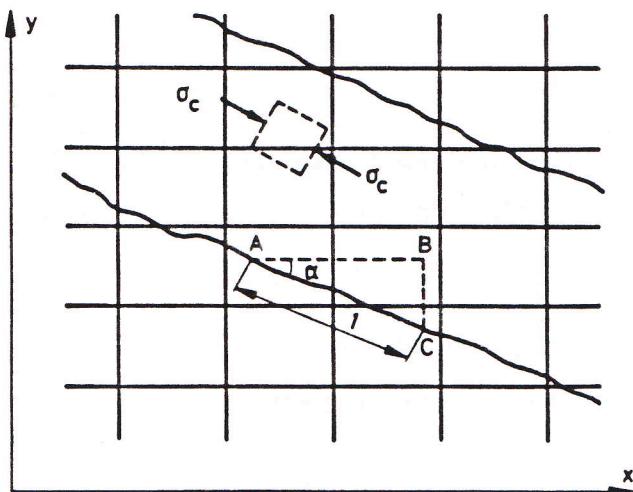
$$\tan \alpha = \frac{m_{xy}}{m_{ux} - m_x} = \frac{m_{uy} - m_y}{m_{xy}} \text{ eller}$$

$$(m_{ux} - m_x)(m_{uy} - m_y) - m_{xy}^2 = 0$$

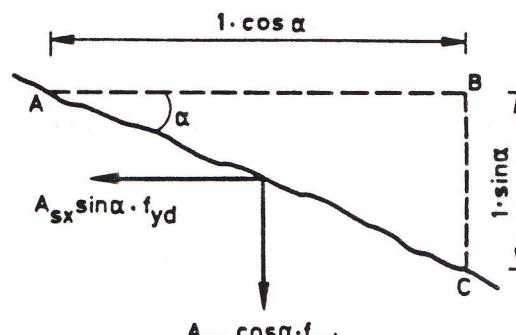
der er flydebetingelsen for revne i undersiden.

Hvis  $\alpha$  er nul eller meget lille, flyder armeringen i x-retningen ikke, men da  $\sin \alpha$  er nul eller meget lille, er  $m_{xy} = 0$  ifølge den første af ligevægtsligningerne, og den anden ligevægtsligning reduceres til  $m_{uy} = m_y$ , der har samme form som betonbjælders flydebetingelse. Tilsvarende fås flydebetingelsen  $m_{ux} = m_x$  for  $\alpha$  lig eller tæt på  $\pi/2$ .

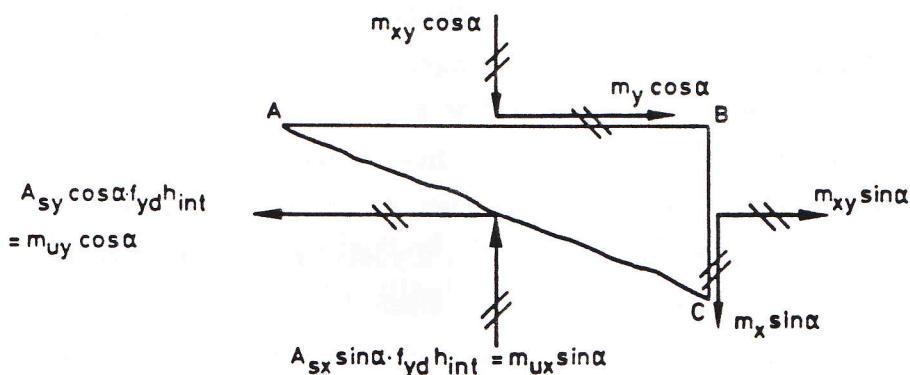
Af flydebetingelsen ses, at for vridningsmomentet  $m_{xy} \neq 0$ , hvad der er normalt i en dobbeltpændt plade, må  $m_x < m_{ux}$  og  $m_y < m_{uy}$ , dvs. bøjningsmomenterne i pladen er mindre end flydemomenterne. Vridningsmomenterne i snittene AB og BC i figur 5 er mulige, fordi der i pladens underside foruden træk i armeringsstængerne er tryk i betonen. I betonen i pladens underside vil den ene hovedspænding være  $\sigma = 0$  vinkelret på revneretningen, og den anden hovedspænding må være en trykspænding  $\sigma = \sigma_c$  virkende parallel med revnerne. Når  $\alpha \neq 0$  og  $\pi/2$ , vil der være forskydningsspændinger i pladens underside i snittene AB og BC og derfor også vridningsmomenter i disse snit. Bæreevnen ville være udtømt, hvis betontrykspændingen i pladens underside blev lig betonens trykstyrke, dvs.  $\sigma_c = f_{cd}$ . Det sker dog ikke i plader, da der er større betontrykspændinger i den urevnede side. Derimod kan betonen i skiver knuses på grund af tryk, som virker parallelt med revneretningen.



Plan af plade med revner i underside



Kræfter gennem revne i pladens underside



Momenter på pladeelement

Figur 5. Plade med revner i undersiden og flydning i begge armeringer i undersiden.

Hvis revnedannelsen sker i oversiden af en betonplade, som har armering i oversiden, er flydebetingelsen

$$(m'_{ux} + m_x)(m'_{uy} + m_y) - m_{xy}^2 = 0$$

hvor  $m'_{ux}$  og  $m'_{uy}$  er de negative flydemomenters numeriske værdier, og  $m_x$  og  $m_y$  er de nu negative snitmomenter. Hvis en betonplade ikke er revnet, vil venstre side i begge flydebetingelser være større end nul.

## ØVREVÆRDIER VED BRUDLINIETEORI

Ligesom for betonbjælker kan man for betonplader bestemme øvreværdier og nedreværdier for bæreevnen. Øvreværdier, som behandles i dette kapitel, fås ved at

1. vælge en geometrisk mulig brudfigur, og derefter
2. opstille arbejdsligningen og løse den med hensyn til lastparameteren.

Brudfiguren er en flydemekanisme, der dannes når en betonplade belastes så meget, at armeringen flyder visse steder i pladen. Ofte flyder armeringen kun langs linier, der kaldes flydelinier. Tidligere kaldtes de brudlinier, og teorien bag fremgangsmåden kaldes på dansk stadig "brudlinieteorien". Den skyldes K.W. Johansen, som offentliggjorde den i 1943 [2]. I udlandet kaldes den "The Johansen Yield Line Theory". Allerede i 1921 brugte A. Ingerslev flydelinier til beregning af betonpladers bæreevne, men brudlinieteoriet blev først virkelig let at anvende, da Johansen i stedet for ligevægtsligninger for hver enkelt pladedel anvendte arbejdsligningen på hele pladen. Herved undgår man de kræfter, knudekræfterne, som pladedelene påvirker hinanden med. Johansens flydebetingelse og teorien for knudekræfter er blevet videreudviklet af M.P. Nielsen [3]. Ingerslev, Johansen og M.P. Nielsen har alle været eller er professorer ved DTH's Afdeling for Bærende Konstruktioner.

### Flydelinier

Når en brudfigur er dannet, vil pladen deformere sig uden at lasten øges, og denne deformation vil enten foregå i områder, der kaldes flydezoner, eller være koncentreret om flydelinier. Der findes tre typer af flydezoner, som beskrevet af M.P. Nielsen, [3] og [4]. Vi vil ikke her komme nærmere ind på flydezoner, men nøjes med brudfigurer dannet alene ved hjælp af flydelinier. Det medfører, at vi ofte ikke kan nå frem til den mindste øvreværdi, men som illustreret for en kvadratisk plade er det muligt med flydelinier alene at opnå løsninger, der kun ligger nogle få procent over den korrekte løsning.

Ved en flydelinie har pladen en enkelt revne eller flere, ret tæt liggende og parallelle revner. Når man tegner brudfigurer, tegner man kun én revne. Flydelinier er positive eller negative. En positiv flydelinie har positivt bøjningsmoment, dvs. træk og revne i undersiden, hvilket kan vises ved et plustegn på tegningen.

Som vist i figur 5 overføres der pr. længdeenhed af en positiv flydelinie to momenter  $m_{uy} \cos\alpha$  og  $m_{ux} \sin\alpha$ , hvor  $m_{uy}$  og  $m_{ux}$  er de flydemomenter, der svarer til armeringen i henholdsvis y- og x-retningen. Ved projektion af disse to momentvektorer på flydeliniens retning og vinkelret herpå fås, som vist i figur 6, at der i flydelinien pr. længdeenhed overføres

$$\text{bøjningsmomentet } m_b = m_{ux} \sin^2\alpha + m_{uy} \cos^2\alpha \text{ og}$$

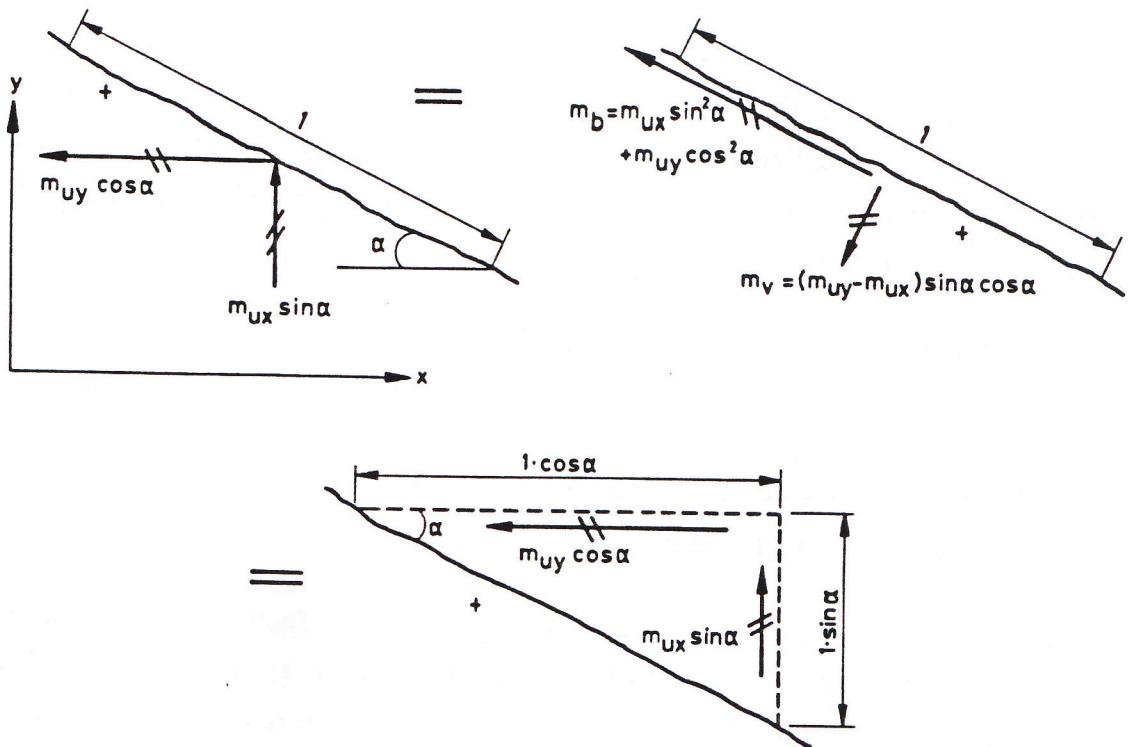
$$\text{vridningsmomentet } m_v = (m_{uy} - m_{ux}) \sin\alpha \cos\alpha$$

Det ses at for isotrop armering, dvs.  $A_{sx} = A_{sy}$  og derfor  $m_{ux} = m_{uy}$ , er vridningsmomentet nul i flydelinerne.

Vridningsmomentet overføres i flydelinien ved lodrette forskydningsspændinger, der kan ækvivaleres med lodrette enkeltkræfter, knudekræfter. Disse bidrager ikke til arbejdet med at deformere pladen, da de opträder parvist, som aktion og reaktion, og med samme flytning. Derimod udfører flydeliniens bøjningsmoment et arbejde, når de to pladedele, der mødes i flydelinien, drejer sig i forhold til hinanden.

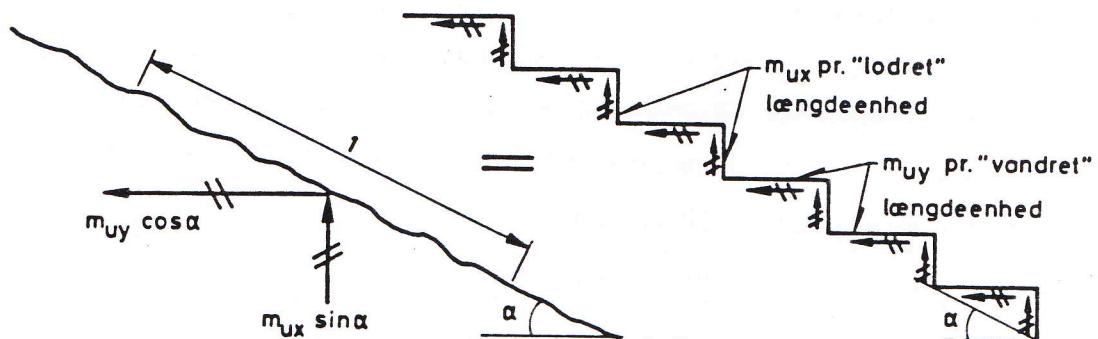
Bøjningsmomentet er imidlertid ret upraktisk at arbejde med i beregninger, undtagen i det isotrope tilfælde, hvor  $m_{ux} = m_{uy} = m_u$  og bøjningsmomentet er  $m_u (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = m_u$ . En lettelse i beregningerne kan opnås ved at regne på en isotrop plade, som er affin med den ortotrope plade, og transformere resultatet til den ortotrope plade ved hjælp af K.W. Johansens "affinitetssætning", [2] og [4]. En isotropt armeret plade kaldes også en ensarmeret plade.

En anden metode til at lette beregningerne for en ortotrop plade vil blive givet her. I stedet for at regne med det arbejde, som bøjningsmomentet udfører, regner man med det arbejde, som udføres af de to momenter  $m_{uy} \cos\alpha$  og  $m_{ux} \sin\alpha$ . De er ækvivalente med bøjnings- og vridningsmomentet, hvor det sidste som nævnt ikke udfører noget arbejde. Af figur 6 ses, at  $m_{uy} \cos\alpha$  virker på en flydelinelængde, som har længden  $1 \cdot \cos\alpha$  i momentvektorens retning, dvs. der virker  $m_{uy}$  pr. længdeenhed i x-retningen. Tilsvarende ses at der virker  $m_{ux}$  pr. længdeenhed i y-retningen. Man kan derfor, som vist i figur 7, erstatte flydeliniens momentpåvirkning med en trappelinies momentpåvirkning, bestående af  $m_{uy}$  pr. længdeenhed af nogle linier og  $m_{ux}$  pr. længdeenhed af andre.



Figur 6. Momenter pr. længdeenhed i positiv flydelinie  
dvs. med revner i pladens underside.

Det må her bemærkes, at  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  ikke er snitmomenterne i snit vinkelret på akserne ved flydelinien, men de udgør et statisk system, som er statisk ækvivalent med snitmomenterne  $m_x$ ,  $m_{xy}$ ,  $m_y$  og  $m_{yx}$ , hvis der virkelig er flydning i armeringen i det område. Hvis man i sine beregninger har placeret en flydelinie, hvor armeringsspændingerne ikke kan nå op på flydespændingen, har man overvurderet momenterne og får en øvre værdi større end den korrekte værdi for brudlasten. Ved at regne med  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  i trappelinienes snit udtrykker man, at der er flydning i flydelinien, og det er derfor ikke nødvendigt at bruge den ovenfor omtalte flydebetingelse.

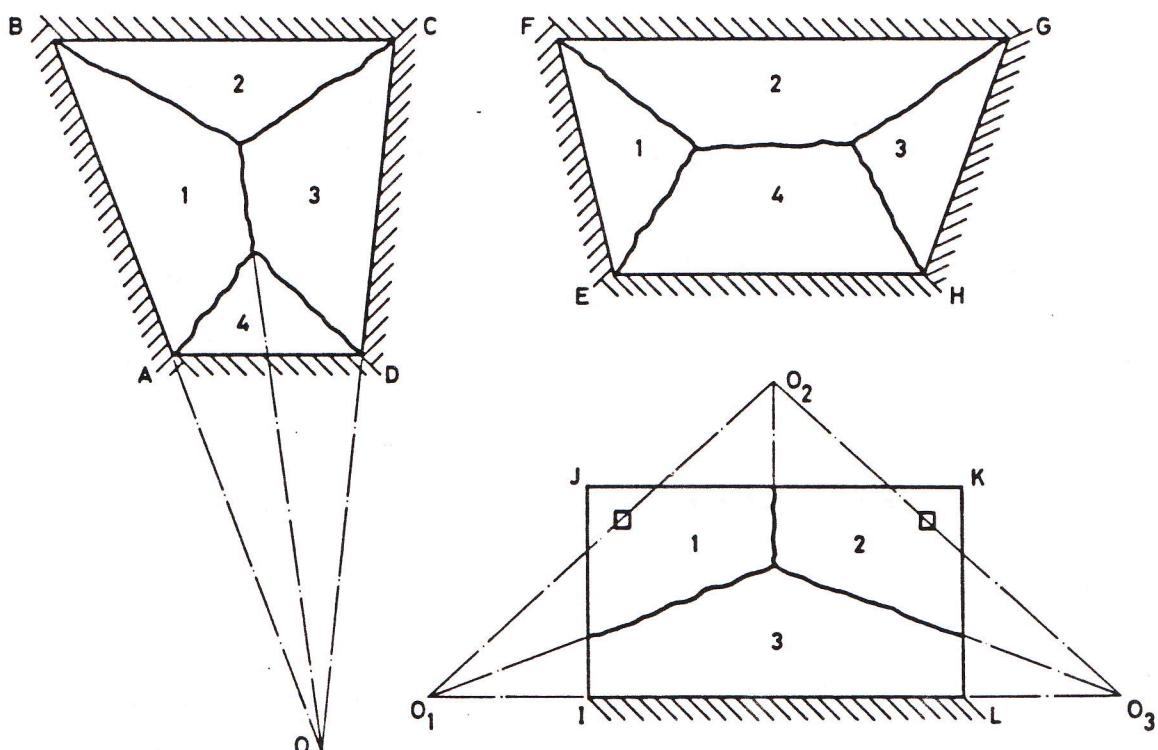


Figur 7. Trappelinien's momentpåvirkning.

## Brudfigurer

Før flydelinierne dannes, vil pladen have elastiske deformationer, der vokser med lasten. Når flydelinierne er dannet, vil pladens nedbøjning vokse under konstant last, og pladens deformationer vil fortsætte, men kun foregå i flydelinierne, da lasten ikke vokser mere. Pladedelene mellem flydelinierne vil derfor nu bevæge sig som stive legemer. En geometrisk mulig brudfigur er en flydemekanisme, der gør det muligt for pladen at fortsætte sin nedbøjning uden at pladedelene ændrer form.

Flydelinierne i en plade skal opfylde en geometrisk betingelse, som er illustreret i figur 8. Pladen ABCD er simpelt understøttet langs hele randen. Pladedel 1 drejer sig om aksen AB, og pladedel 3 om aksen CD. Flydelinen mellem de to pladedele vil gå gennem skæringspunktet O mellem linierne AB og CD, da tre planers skæringslinier skal skære hinanden i et punkt eller være parallelle. De tre planer er pladens oprindelige plan og de to pladedeles planer efter drejning. På samme måde vil AB, BC og flydelinen mellem pladedel 1 og 2 skære hinanden i B. For pladen EFGH i figur 8 er FG og EH parallelle, og flydelinen mellem pladedelene 2 og 4 vil være parallel med disse to drejningsakser. For pladen IJKL vil drejningsakserne for pladedelene 1 og 2 gå gennem punktunderstøtningerne, og  $O_1$ ,  $O_2$  og  $O_3$  er skæringspunkter mellem drejningsakser og flydelinier.



Figur 8. Skæringspunkter for drejningsakser og flydelinier.

## Arbejds ligningen

I arbejds ligningen udtrykkes, at det ydre arbejde  $W_{ext}$ , som lasten udfører ved en valgt flytning, er lig det indre arbejde  $W_{int}$ , som bliver brugt til den relative drejning af pladedelene i flydelinierne.\*

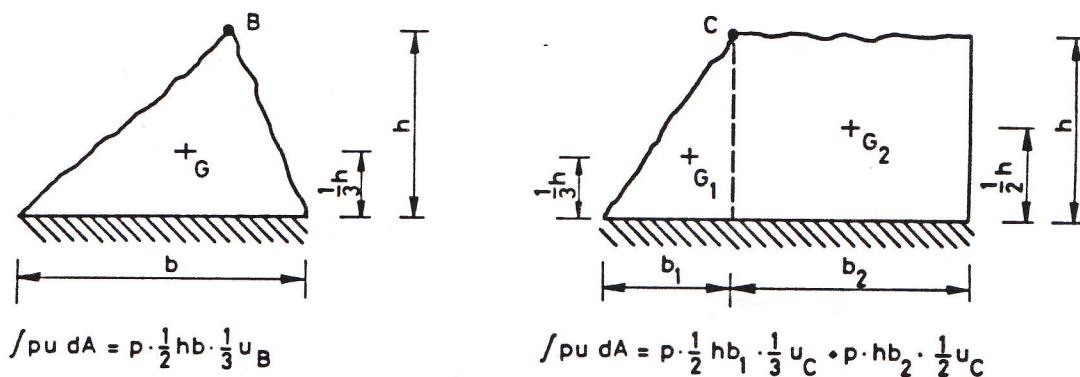
Det ydre arbejde findes som summation af last gange nedbøjning:

$$W_{ext} = \sum F_i u_i$$

Er lasten en ensformigt fordelt last  $p$ , hvilket meget ofte er tilfældet, kan  $W_{ext}$  findes som summationen af lasten på hver pladedel gange nedbøjningen af pladedelens tyngdepunkt, da tyngdepunktets nedbøjning for en stiv pladedel er lig pladedelens middelnedbøjning. Er pladedelen trapezformet, er det praktisk at opdele den i trekantede og rektangler, som vist i figur 9.

Det ydre arbejde kan i stedet findes som summation af momentet af de enkelte pladedeles laster om pladedelens drejningsakse gange pladedelens vinkeldrejning. For den trekantede pladedel i figur 9 fås således

$$\Delta W_{ext} = M \cdot \omega, \text{ hvor } M = p \cdot \frac{1}{2} h b \cdot \frac{1}{3} h \text{ og } \omega = u_B / h$$



Figur 9. Arbejde udført af ensformigt fordelt last  $p$ .

\* Hvis de indre og ydre kræfter eller drejningsakserne ændres under flytningen, benyttes ikke  $W_{ext} = W_{int}$ , men  $\dot{W}_{ext} = \dot{W}_{int}$ , hvor  $\dot{W}_{ext}$  og  $\dot{W}_{int}$  er tilvæksterne i arbejde for tilvæksterne  $\dot{u}$  i nedbøjning og  $\dot{\omega}$  i vinkeldrejning.

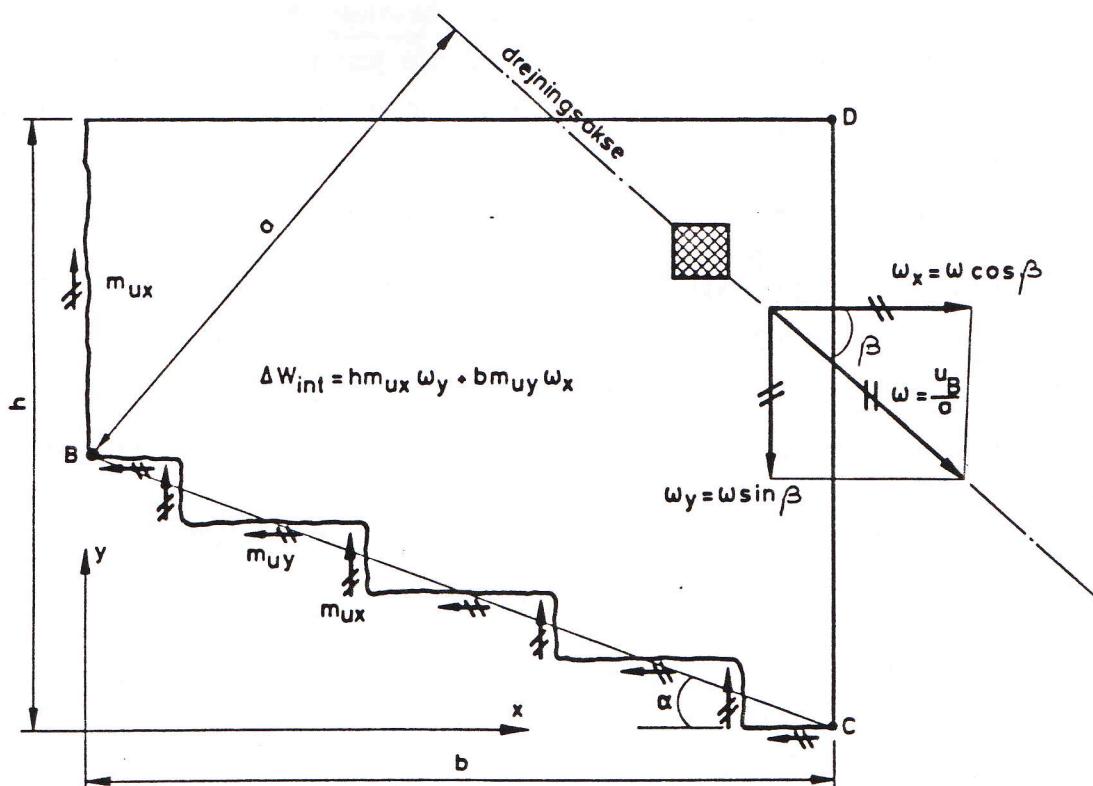
Det indre arbejde, som bliver sat til ("dissipated") ved at dreje pladedelene i forhold til hinanden, kunne findes som summationen af bøjningsmomentet  $m_b$  i flydelinierne gange den relative drejning  $\Delta\omega$  af de to pladedele, der mødes i hver flydelinie, dvs.

$$W_{int} = \int m_b \Delta\omega ds \text{ langs alle flydelinierne}$$

Det er imidlertid nemmere at se på én pladedel ad gangen og bestemme arbejdet som udføres af  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  ved drejning af pladedelen vinklen  $\omega$ . Pladedelens drejningsvinkel  $\omega$  kan deles i  $\omega_x$  om en akse parallel med x-aksen og  $\omega_y$  om en akse parallel med y-aksen, hvor drejningsvektorerne er

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y$$

For pladedelen, som er vist i figur 10, er vinkeldrejningen  $\omega_x$  derfor  $\omega_x = \omega \cos \beta$ . Vinkeldrejningen  $\omega_x$  kan i stedet bestemmes som drejningen af en linie, som står vinkelret på x-aksen. For pladedelen i figur 10 kan  $\omega_x$  derfor i stedet bestemmes som  $\omega_x = (u_C - u_D)/h$ .



Figur 10. Indre arbejde  $\Delta W_{int}$  for pladedel

I figur 10 er vist pladedel 2 af pladen IJKL i figur 8. Arbejdet, som udføres af flydemomenterne på pladedelen, er det skalære produkt af  $\bar{M}$  og  $\bar{\omega}$ :

$$\begin{aligned}-\Delta W_{int} &= (h \bar{m}_{ux} + b \bar{m}_{uy}) \cdot \bar{\omega} \\ &= (h \bar{m}_{ux} + b \bar{m}_{uy}) \cdot (\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) \\ &= -h m_{ux} \omega_y - b m_{uy} \omega_x\end{aligned}$$

Der er her sat minus foran  $\Delta W_{int}$ , da det indre arbejde er defineret som det arbejde, der bliver sat til for at overvinde flydemomenternes modstand. Det ses, at flydemomenterne normalt udfører et negativt arbejde, da de modarbejder drejningen af pladedelen.  $W_{int}$  kan derfor findes mere direkte ved at regne  $m_{ux}$ ,  $m_{uy}$ ,  $\omega_x$  og  $\omega_y$  numerisk, og bestemme  $\Delta W_{int}$  som summen af de positive led, der fås ved at gange trappelinienes momenter med de tilsvarende vinkeldrejninger

$$\Delta W_{int} = h m_{ux} \omega_y + b m_{uy} \omega_x$$

Den mindste øvreværdi er vanskelig at bestemme, men som det vises senere for en kvadratisk plade, kan man opnå en ret god tilnærmelse, ca. 10% fejl, hvis man benytter en nogenlunde rimelig brudfigur. Det anbefales derfor at reducere den fundne brudlast med 10% i stedet for at lave mindre justeringer på en ellers fornuftig brudfigur. En af disse justeringer er at indføre vipper i hjørnerne, som vist senere for den kvadratiske plade. I øvrigt er betonplader stærkere end svarende til brudlinieteori på grund af den senere omtalte Kempeffekt.

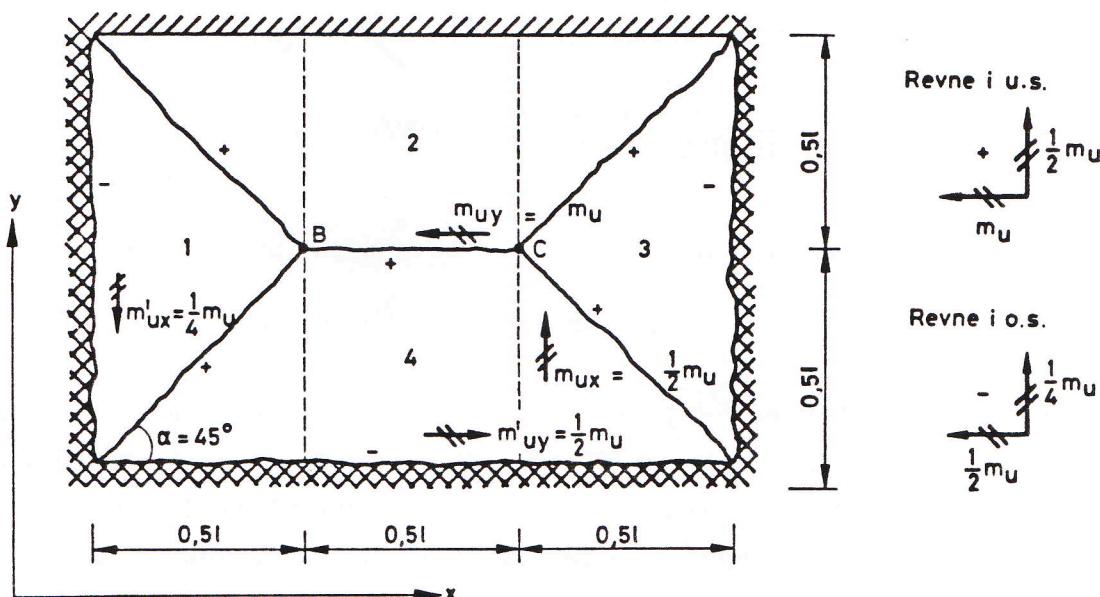
Anvendes øvreværdiløsninger ikke til bestemmelse af brudlasten for en given plade, men til dimensionering, hvor  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  skal bestemmes for en given last, må de fundne værdier for  $m_{ux}$  og  $m_{uy}$  forøges, f.eks. ca. 10%, da de fundne værdier er på den usikre side, når man ikke har brugt den korrekte brudfigur.

Den mindste øvreværdi med tilhørende brudfigur for en række isotrope plader er givet af M.P. Nielsen ([4] side 270 og 271).

## Eksempel 2. Øreværdi for rektangulær plade

En rektangulær betonplade med sidelængderne  $1,5 \cdot l$  og  $l$  er simpelt understøttet på den ene side og indspændt på de tre andre som vist i figur 11. Pladen armeres i undersiden så  $m_{uy} = m_u$  og  $m_{ux} = 0,5 m_u$  og i oversiden så  $m'_{uy} = 0,5 m_u$  og  $m'_{ux} = 0,25 m_u$ , dvs. med mest armering på den korte led, i y-retningen. Pladens last er en ensformigt fordelt last  $p$ .

En øreværdi for brudlasten  $p_u$  skal bestemmes udtrykt ved  $m_u$  og  $l$  og dernæst beregnes de flydemomenter, som pladen skal dimensioneres for, hvis  $p = 8,6 \text{ kN/m}^2$  og  $l = 4,2 \text{ m}$ .



Figur 11. Simpel brudfigur i kvadratisk plade

### Referencer

Side 22

For den i figur 11 viste brudfigur med nedbøjningen  $u_B = 1$  er  $u = \frac{1}{2}$  for tyngdepunkterne af de to rektangler mellem de punkterede linier og  $u = \frac{1}{3}$  for tyngdepunkterne af de seks trekkanter. Det ydre arbejde er derfor

$$W_{ext} = \sum p A_i u_i = p \cdot 0,5 l^2 \cdot \frac{1}{2} + p \cdot l^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12} p l^2$$

Drejningsvektorens komposanter, regnet numerisk, er

$$\omega_x = 0 \text{ og } \omega_y = \frac{1}{0,5l} = \frac{2}{l} \text{ for pladedelene 1 og 3 og}$$

$$\omega_x = \frac{1}{0,5l} = \frac{2}{l} \text{ og } \omega_y = 0 \text{ for pladedelene 2 og 4.}$$

Det indre arbejde, med pladedelene taget i nummerorden, er

$$W_{int} = \int m \omega ds = (\frac{1}{2}m_u + \frac{1}{4}m_u)l \cdot \frac{2}{l} + m_u \cdot 1,5l \cdot \frac{2}{l}$$

$$+ (\frac{1}{2}m_u + \frac{1}{4}m_u)l \cdot \frac{2}{l} + (m_u + \frac{1}{2}m_u)1,5l \cdot \frac{2}{l} = 10,5m_u$$

$$W_{ext} = W_{int} \text{ giver øvreværdien } p_u^+ = \frac{12}{7l^2} 10,5m_u = 18 \frac{m_u}{l^2}$$

For  $p = 8,6 \text{ kN/m}^2$  og  $l = 4,2 \text{ m}$  og med 10% reduktion af faktoren 18, da det ikke er den korrekte øvreværdi, fås:

$$m_u = \frac{p l^2}{18} \cdot \frac{1}{0,9} = \frac{8,6 \cdot 4,2^2}{18 \cdot 0,9} = 9,4 \text{ kNm/m}$$

Der skal derfor armeres i undersiden for

$$m_{ux} = 0,5m_u = 4,7 \text{ kNm/m} \text{ og } m_{uy} = 9,4 \text{ kNm/m}$$

hvilket for pladen i eksempel 1 kan klares med T8 pr. 290 i x-retningen og T8 pr. 140 i y-retningen. I oversiden lægges halvt så meget armering som i undersiden. Det medfører, at armeringen i x-retningen i oversiden bliver mindre end minimumarmeringen, men det kan accepteres, da pladen er statisk ubestemt og derfor ikke får uvarslet brud, når der opstår revner i oversiden ved understøtningerne.

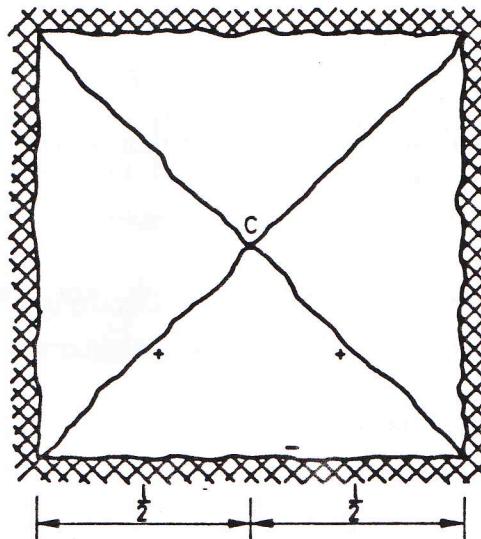
Iøvrigt kunne en lidt bedre øvreværdi være opnået ved at anvende en brudfigur af samme form, men med flydelinien BC lidt nærmere den simpelt understøttede rand. Herved ville øvreværdien for bæreevnen blive lidt mindre end  $p_u^+ = 18 \frac{m_u}{l^2}$  og det hertil svarende brudmoment ville blive lidt større end  $m_u = p l^2 / 18$ .

### Kvadratisk, isotrop plade

For at illustrere indflydelsen af brudfigurerne form på øreværdiernes størrelse er her givet seks øreværdier for den samme plade. Pladen er en kvadratisk plade med samme armering i x- og y-retning og samme armering i over- og underside, dvs.

$$m_{ux} = m_{uy} = m'_{ux} = m'_{uy} = m_u$$

Pladens last er en ensformigt fordelt last p.

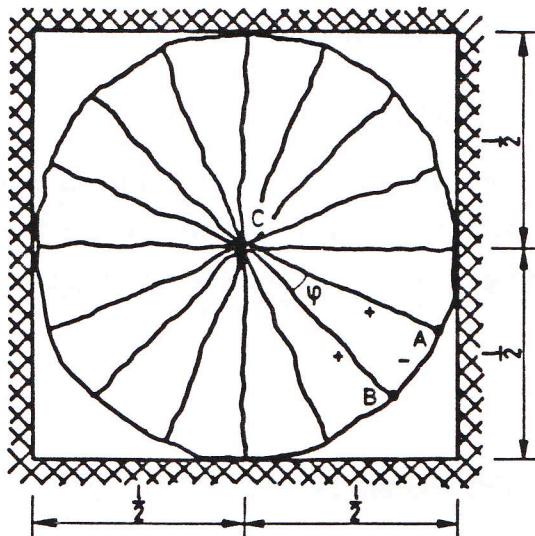


Figur 12. Brudfigur 1

$$p_{lu}^+ = 48 m_u / l^2$$

Brudfigur 1 har fire trekantede pladedele, der alle drejer sig vinklen  $\omega = 1/(2l) = 2/l$  om deres understøttede rand, hvis punkt C har nedbøjningen  $u_C = 1$ . Lastens gennemsnitlige flytning vil være  $1/3$ , og det ydre og indre arbejde bliver

$$\left. \begin{aligned} W_{ext} &= pl^2 \cdot \frac{1}{3} \\ W_{int} &= 4 \cdot (m_u + m_u) l \cdot \frac{2}{l} \end{aligned} \right\} W_{ext} = W_{int} \Rightarrow p_{lu}^+ = 48 \frac{m_u}{l^2}$$



Figur 13. Brudfigur 2

$$P_{2u}^+ = 48 m_u / l^2$$

Brudfigur 2 har mange trekantede pladededele, og den vilkårlige trekant CAB drejer sig  $\omega = 2/l$  om siden AB for  $u_C = 1$ .

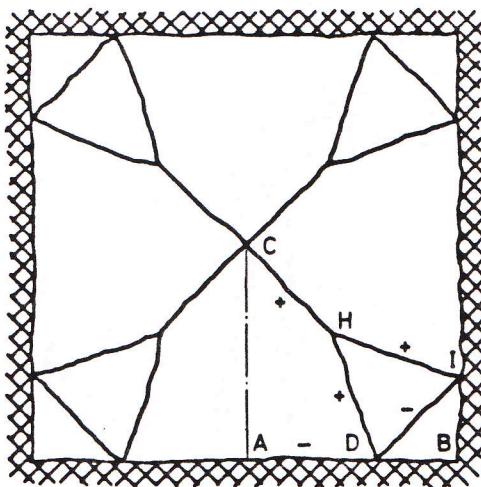
I afsnittet om flydelinier blev det vist, at for  $m_{ux} = m_{uy} = m$  har flydelinen med vinklen  $\alpha$  med x-aksen vridningsmomentet nul og bøjningsmomentet

$$m_b = m_{ux} \sin^2 \alpha + m_{uy} \cos^2 \alpha = m_u, \text{ uafhængigt af } \alpha$$

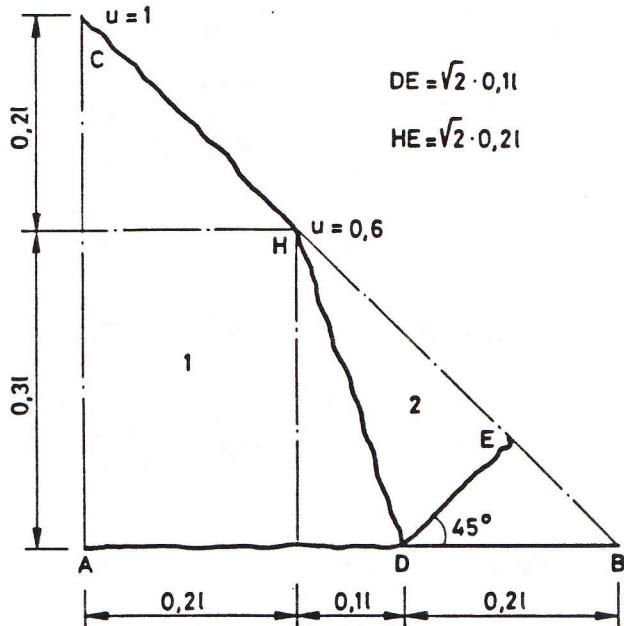
Den negative flydelinie AB i figur 13 har derfor flydemomentet  $m_u$  pr. længdeenhed, og momentvektorerne i de positive flydelinier kan sammensættes til en vektor med størrelsen  $m_u$  gange længde AB. Da den samlede længde af den negative flydelinie nærmer sig  $\pi l$ , når antallet af trekanter forøges, og da lasten  $p\pi l^2/4$  har en gennemsnitlig flytning lig 1/3, fås

$$\left. \begin{aligned} W_{ext} &= p \frac{\pi}{4} l^2 \cdot \frac{1}{3} \\ W_{int} &= (m_u + m_u) \pi l \cdot \frac{2}{l} \end{aligned} \right] \quad W_{ext} = W_{int} \Rightarrow P_{2u}^+ = 48 \frac{m_u}{l^2}$$

Når antallet af radiære flydelinier er stort, er det mere korrekt at sige, at brudfiguren har en flydezone. Pladen har i denne flydezone form af en kegle med toppunkt i C. Flydezonen er iflg. M.P. Nielsen ([3] side 260) en flydezone type 3, der har konisk form og ikke-parallelle revner i enten under- eller overside.



Figur 14. Brudfigur 3



$$P_{3u}^* = 45,38 \frac{m_u}{l^2}$$

Brudfigur 3 er brudfigur 1 forsynet med vipper, som fremkommer ved at en positiv flydelinie, inden den når ud til et pladehjørne, deler sig i to og sammen med en negativ flydelinie danner en trekantet pladedel, der "vipper" om den negative flydelinie. I figur 14 drejer trekanten HDI sig om den negative flydelinie DI.

Til højre i figur 14 er en ottendededel af pladen tegnet. For nedbønjningen  $u = 1$  i C og med de i figuren viste mål, er

$$\omega_1 = \frac{2}{l} \text{ for pladedel 1,}$$

$$\omega_2 = \frac{0,6}{\sqrt{2} \cdot 0,2l} = \frac{3}{\sqrt{2}l} \text{ for pladedel 2 og}$$

$$\text{areal af trekant HED er } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 0,2l \sqrt{2} \cdot 0,1l = 0,02 l^2$$

Det ydre og indre arbejde bliver

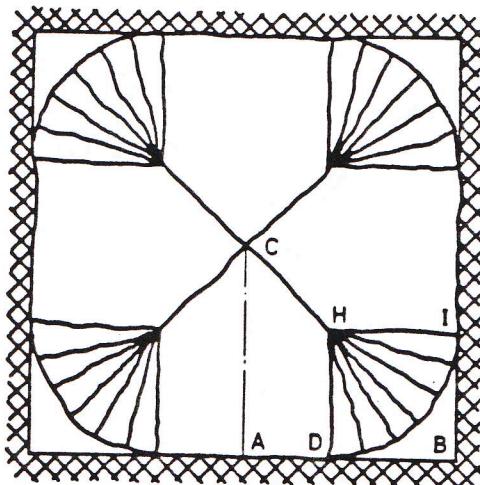
$$\frac{1}{8} W_{ext} = p \left[ 0,3l \cdot 0,2l \cdot \frac{0,6}{2} + \frac{1}{2}(0,2l)^2(0,6 + \frac{0,4}{3}) + \frac{1}{2} \cdot 0,3l \cdot 0,1l \cdot \frac{0,6}{3} \right]$$

$$+ p \cdot 0,02 l^2 \cdot \frac{0,6}{3} = \frac{0,119}{3} p l^2$$

$$\frac{1}{8} W_{int} = (m_u + m_u) 0,3l \cdot \frac{2}{l} + (m_u + m_u) \sqrt{2} \cdot 0,1l \cdot \frac{3}{\sqrt{2}l} = 1,8 m_u$$

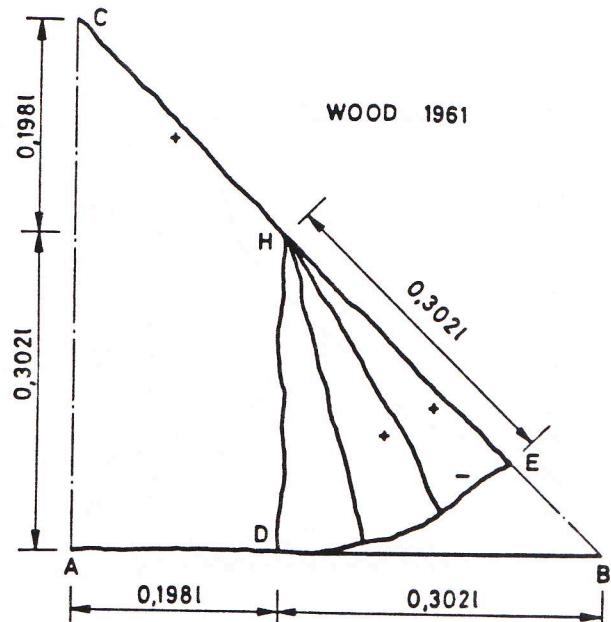
$$W_{ext} = W_{int} \Rightarrow p_{3u}^* = 45,38 \frac{m_u}{l^2}$$

Vipperne har således reduceret øvreværdien med ca. 5%.



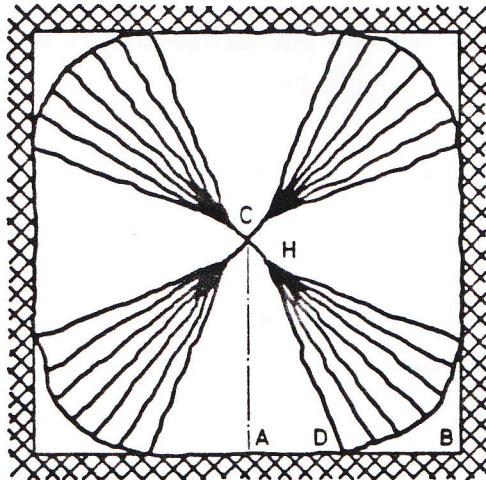
Figur 15. Brudfigur 4

$$P_{4u}^+ = 43,85 \frac{m_u}{l^2}$$



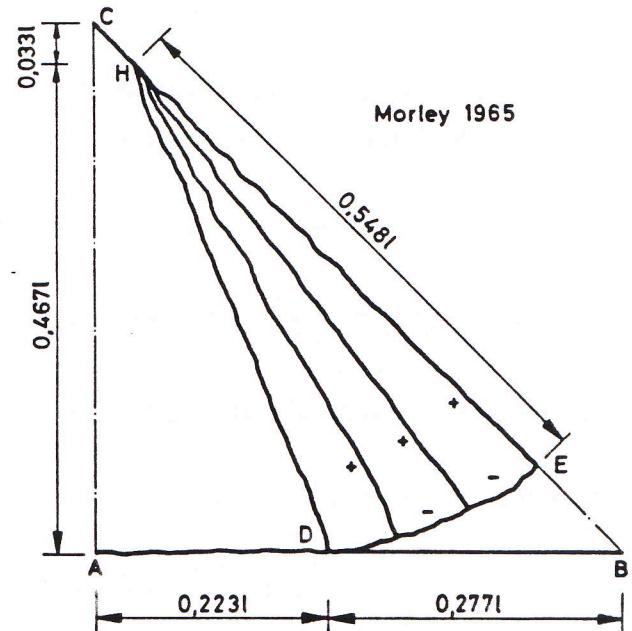
Brudfigur 4 skyldes Wood og har fire flydezoner type 3 med kegleform. DE er en cirkelbue, og keglen HDE har toppunkt i H. Øvreværdien er iflg. Fox [6]

$$P_{4u}^+ = 43,85 \frac{m_u}{l^2}$$



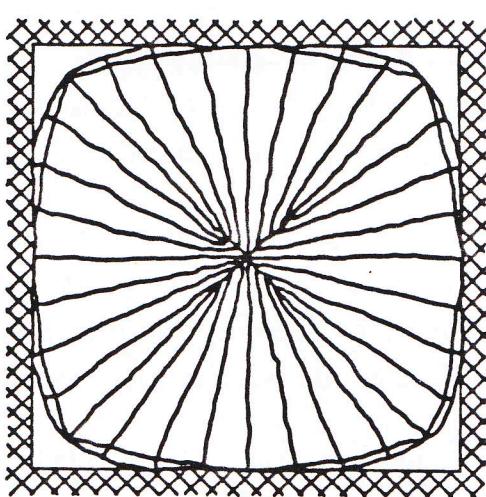
Figur 16. Brudfigur 5

$$P_{5u}^+ = 42,88 \frac{m_u}{l^2}$$



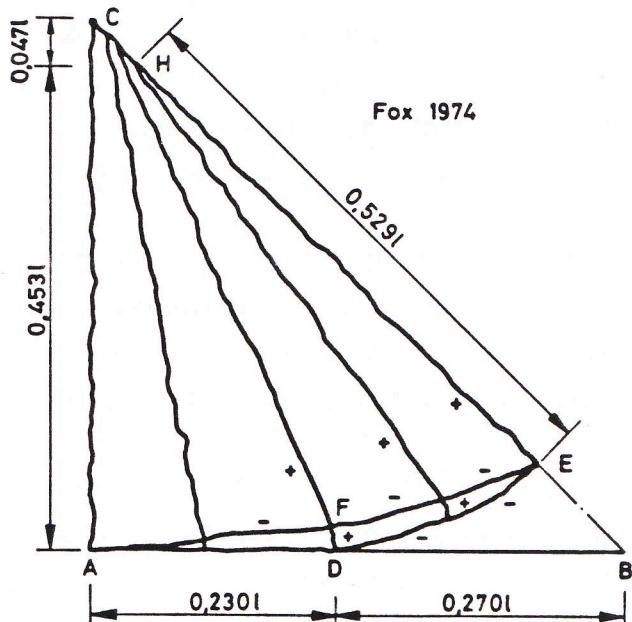
Brudfigur 5 er fundet af Morley og har også fire flydezoner type 3, men med konisk form. De retliniede frembringere går gennem H og punkter på kurven DE, som ikke er en cirkelbue. Øvreværdien er iflg. Fox [6]

$$P_{5u}^+ = 42,88 \frac{m_u}{l^2}$$



Figur 17. Brudfigur 6

$$P_{6u}^+ = 42,85 \frac{m_u}{l^2}$$



Brudfigur 6 er lavet af E.N. Fox og har flydezoner af type 2 og 3. CHEFA er en flydezone type 3, der kun afviger fra Morley's brudfigur ved at frembringerne går gennem et punkt, der bevæger sig fra C til H, når et andet punkt på frembringeren bevæger sig fra A over F til E. Området AFEDA er en flydezone type 2, defineret af M.P. Nielsen [3]. Her er der revner både i over- og underside, og i ethvert punkt er revnerne i den ene side vinkelret på revnerne i den anden side. Armeringen flyder i begge sider, og pladen er sadelformet, idet dens krumning har forskelligt fortegn i de to hovedretninger. Fox [6] viste at snitkræfterne overalt i pladen opfylder flydebetingelsen, således at det også er en nedreværdiløsning og derfor den korrekte brudværdi. Størrelsen er

$$P_{6u}^+ = P_u = 42,85 \frac{m_u}{l^2}$$

Sammenlignes brudfigur 1 med den korrekte brudfigur 6, fås

$$\frac{P_u}{P_{1u}^+} = \frac{42,85}{48} \approx 0,9$$

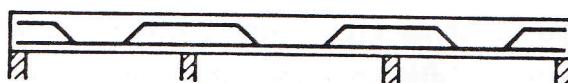
så for denne plade er den korrekte værdi 0,9 gange øvreværdien for den simple brudfigur. I et senere afsnit om Kempeffekten vil det blive vist, at pladeteoriens "korrekte" værdi er en undervurdering af bæreevnen.

## Opbøjning og opskydning

I almindeligt byggeri er plader i dæk oftest rektangulære og med nedadrettet last. Armering i oversiden er derfor kun nødvendig ved understøtningerne. Det må her bemærkes, at selv ved simpelt understøttede rande lægger man armering i oversiden, som omtalt senere i afsnittet om nedreværdier ved normens metode.

Oversidearmering kan enten være en separat armering, eventuelt et svejst net, eller fås ved at opbøje halvdelen af undersidearmeringen, som vist øverst i figur 18. I zoner, hvor halvdelen af undersidearmeringen er opbøjet, bør man i beregningerne tage hensyn til at flydemomentet er mindre i de positive flydelinier.

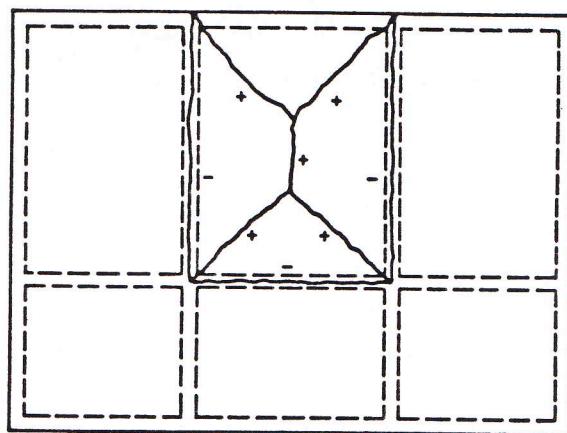
Mangler oversidearmeringen ved fagmidte af nabopladerne til en plade, kan pladens indspændingsmomenter få nabopladerne til at bøje op, og man kan få en brudform med såkaldt opskydning, se brudfigur 2 i figur 18. Opsydning optræder især, hvis nabofagernes bundne last er lille, da lasten her modvirker opskydningen.



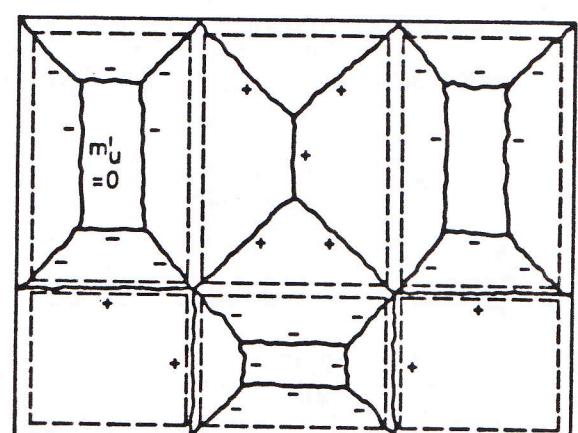
Armering med opbøjning. Lodret snit



Statisk model. Lodret snit



Brudfigur 1. Plan

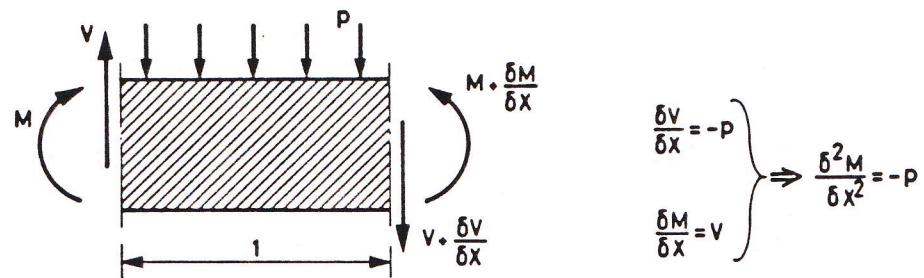


Brudfigur 2.

Figur 18. Brudformer uden og med opskydning.

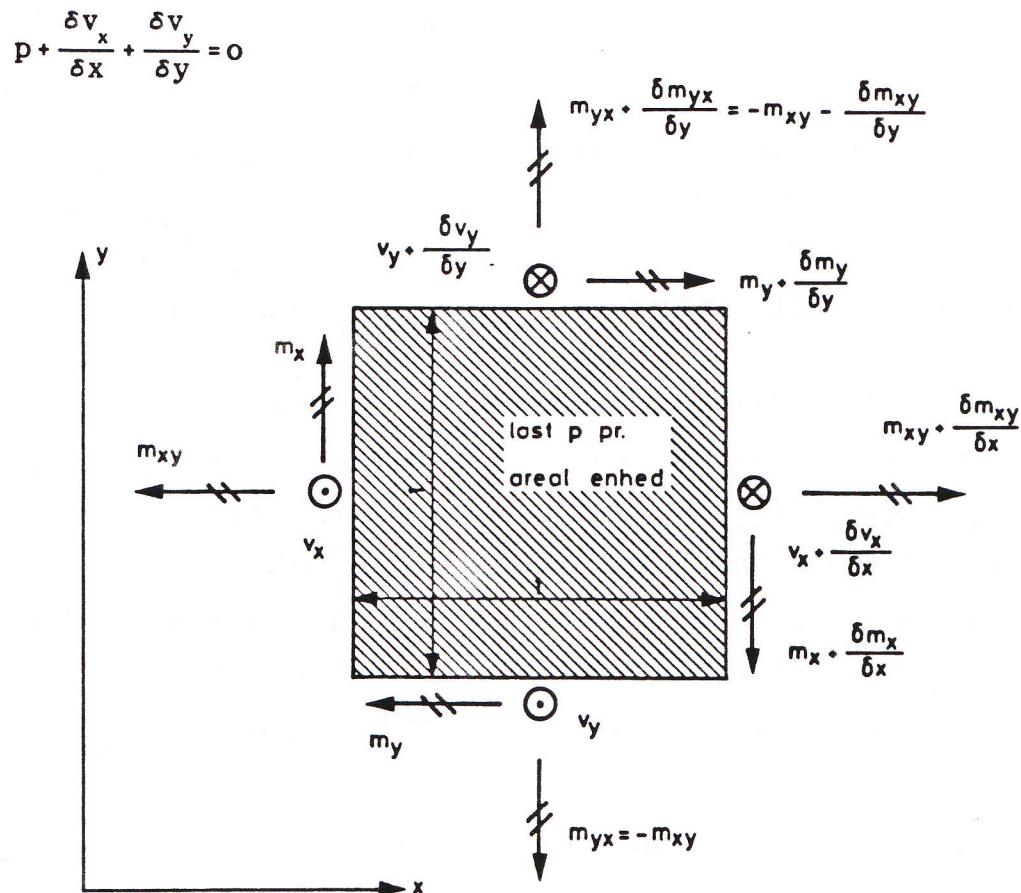
## PLADENS LIGEVÆGTSLIGNING

Opstilles ligevægtsligningerne for en kort bjælkelængde, finder man at bøjningsmomentet  $M$ , forskydningskraften  $V$  og den fordelte last  $p$  varierer hen gennem bjælken på en måde, som kan udtrykkes i de simple ligninger givet i figur 19.



Figur 19. Bjælkens ligevægtsligning

Opstilles ligevægtsligningerne for pladeelementet i figur 20, hvor der for nemheds skyld er brugt  $dx = 1$  og  $dy = 1$ , giver projektion på kraftretningen



Figur 20. Snitkræfter på pladeelement

og moment om en linie gennem kvadratets midtpunkt og parallel med y-aksen giver

$$v_x \cdot 1 + \frac{\delta v_x}{\delta x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\delta m_x}{\delta x} - \frac{\delta m_{xy}}{\delta y} = 0$$

hvor der er udnyttet at  $m_{yx} = -m_{xy}$  fra afsnittet om snitkræfter. Antages det andet led at være meget mindre end det første, får

$$v_x = \frac{\delta m_x}{\delta x} + \frac{\delta m_{xy}}{\delta y}$$

Tilsvarende fås ved at tage moment om midtlinien parallel med x-aksen

$$v_y = \frac{\delta m_y}{\delta y} + \frac{\delta m_{xy}}{\delta x}$$

Differentieres udtrykket for  $v_x$  med hensyn til x og udtrykket for  $v_y$  med hensyn til y, og indsættes i projektionsligningen, får pladens ligevægtsligning

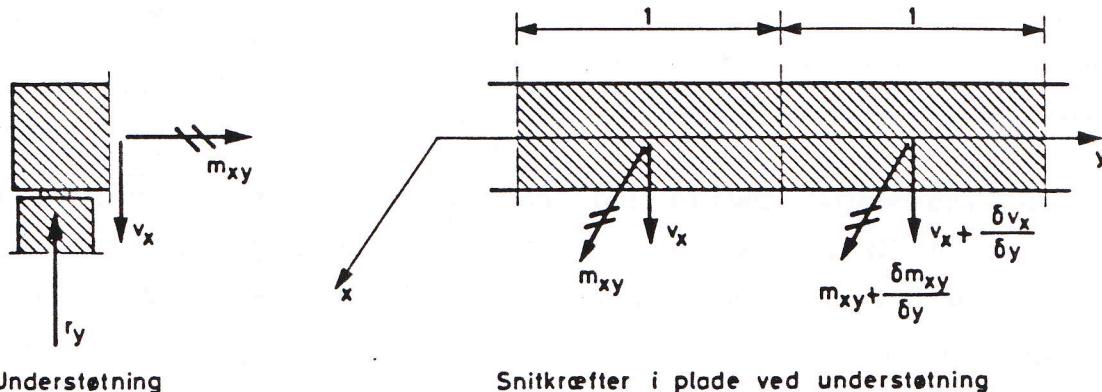
$$\frac{\delta^2 m_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 m_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 m_y}{\delta y^2} = -p$$

## Reaktioner

Af hensyn til dimensionering af de tilstødende konstruktionsdele er det nødvendigt at kunne bestemme pladens reaktioner. De benævnes  $r$  og har dimensionen kraft pr. længdeenhed. Sammenhængen mellem  $r$  og snitkræfterne  $v$  og  $m_{xy}$  er i figur 21 fundet for en simpelt understøttet pladerand parallel med y-aksen.

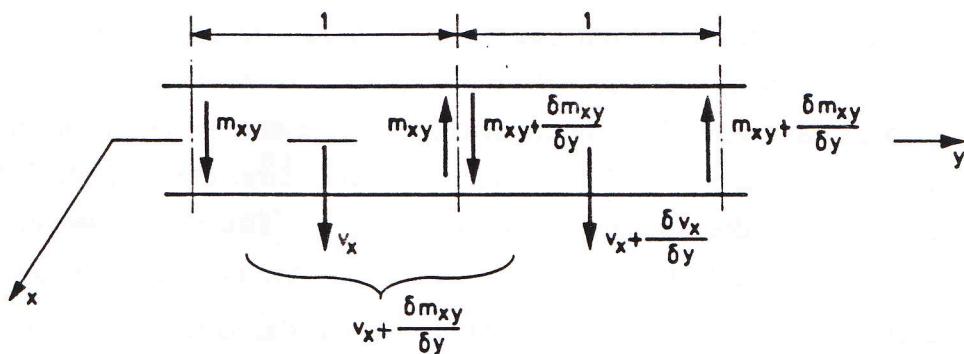
Vridningsmomentet  $m_{xy}$  virkende på snitlængden  $dy = 1$  erstattes af et kraftpar, der består af to modsat rettede kræfter i indbyrdes afstand 1 og begge af størrelsen  $m_{xy}$ . Det samme gøres for næste snitlængde  $dy = 1$ , hvor vridningsmomentet og derfor også enkeltkræfterne har størrelsen  $m_{xy} + \delta m_{xy}/\delta y$ . I overgangen mellem de to snitlængder virker nu to kræfter, og deres resultant er tilvæksten  $\delta m_{xy}/\delta y$ . Fortsættes videre hen ad snittet, får man for hver snitlængde  $dy = 1$  dette bidrag plus forskydningskraften  $v_x$ , og pladereaktionen er derfor

$$r_y = v_x + \frac{\delta m_{xy}}{\delta y}$$

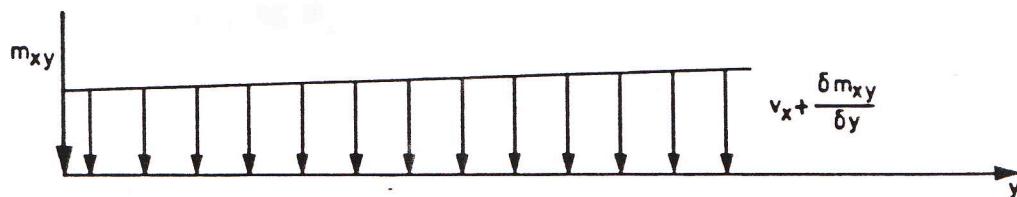


Understøtning

Snitkræfter i plade ved understøtning



Kraftsystem ækvivalent med snitkræfterne



Pladens virkning på understøtningen

Figur 21. Statisk ækvivalente reaktioner

Et tilsvarende udtryk fås for en understøtning parallel med x-aksen. Indsættes udtrykkene for  $v_x$  og  $v_y$ , som fandtes i det foregående afsnit, fås reaktionerne

$$r_x = v_y + \frac{\delta m_{xy}}{\delta x} = \frac{\delta m_y}{\delta y} + 2 \frac{\delta m_{xy}}{\delta x}$$

$$r_y = v_x + \frac{\delta m_{xy}}{\delta y} = \frac{\delta m_x}{\delta x} + 2 \frac{\delta m_{xy}}{\delta y}$$

Disse udtryk kan også bruges for en understøtning med indspænding, da tilstedeværelsen af et snitmoment og et indspændingsmoment ikke ændrer på ligevægten af de lodrette kræfter.

Foruden reaktionen  $r$  pr. længdeenhed af en understøtning vil der ved hver af de to ender af reaktionens længde virke en enkeltkraft, der er lig størrelsen af vridningsmomentet  $m_{xy}$  det pågældende sted.

Er en plade understøttet langs to rørne, der mødes i et hjørne af pladen, vil der her virke to enkeltkræfter og deres resultant kaldes en **hjørnekraft**. Hvis de to rørne står vinkelret på hinanden, er den ene kraft lig  $m_{xy}$  og den anden  $-m_{yx}$ , så hjørnekraften bliver

$$F = m_{xy} - m_{yx} = 2m_{xy}$$

En rektangulær plade, der er understøttet langs alle fire sider, vil være påvirket af en hjørnekraft i hvert hjørne, og er pladen vandret og påvirket af en nedadrettet last, kan man vise (se afsnittet om normens metode), at pladen vil være påvirket af nedadrettede hjørnekraæfter i alle fire hjørner, dvs. modsat rettet reaktionerne  $r$ , der virker opad på pladen. Disse hjørnekraæfter forhindrer pladehjørnerne i at løfte sig fra understøtningerne, og understøtningerne skal derfor udformes, så de kan holde pladehjørnerne nede. Desuden skal pladen, selv om den er simpelt understøttet, forsynes med armering i oversiden i hjørnerne, hvis man vil undgå store revner i oversiden af pladen i hjørnerne.

## NEDREVÆRDIER VED NORMENS METODE

Hvis man kan finde en snitkraftfordeling, som både er statisk tilladelig, dvs. opfylder pladens ligevægtsligning, og tilfredsstiller den fysiske betingelse, dvs. opfylder flydebetingelsen, er den tilsvarende last en nedreværdi for pladens bæreevne.

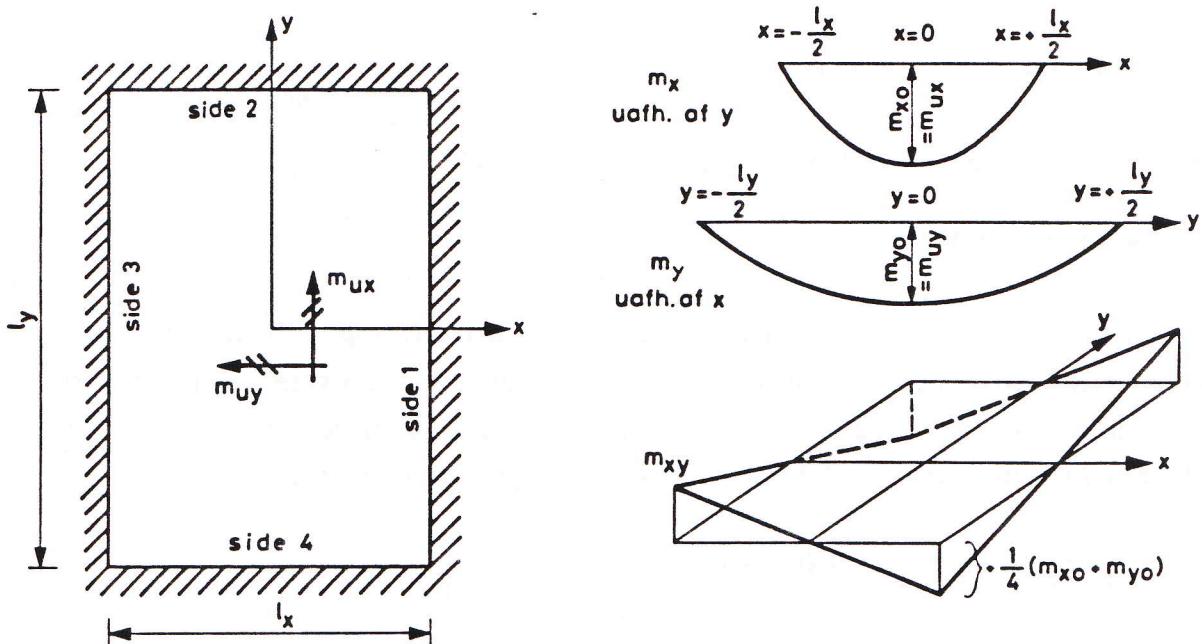
Normen for betonkonstruktioner DS 411, V 6.1.4, giver en nedreværdiløsning for dobbeltpændte, rektangulære plader, som ved både simpelt understøttede og indspændte rande har en oversidearmering, der er halvdelen af undersidearmeringen, se figur 24. Metoden anvendes meget i praksis og vil blive gennemgået i det følgende. En grundigere behandling er givet af Finn Bach og M.P. Nielsen [7].

### Rektangulær plade med simple understøtninger

Den i figur 22 viste snitkraftfordeling, hvor kurverne for  $m_x$  og  $m_y$  er andengradsparaboler, er givet ved

$$m_x = m_{xo} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{l_x} \right)^2 \right]$$

$$m_y = m_{yo} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{l_y} \right)^2 \right] \text{ og } m_{xy} = -(m_{xo} + m_{yo}) \frac{xy}{l_x l_y}$$



Figur 22. Snitkræfter i plade med simple understøtninger

Differentieres disse udtryk fås

$$\frac{\delta^2 m_x}{\delta x^2} = -8 \frac{m_{xo}}{l_x^2}$$

$$\frac{\delta^2 m_y}{\delta y^2} = -8 \frac{m_{yo}}{l_y^2} \quad \text{og} \quad \frac{\delta^2 m_{xy}}{\delta x \delta y} = -\frac{m_{xo} + m_{yo}}{l_x l_y}$$

Indsættes disse resultater i pladens ligevægtsligning fås

$$-8 \frac{m_{xo}}{l_x^2} - 2 \frac{m_{xo} + m_{yo}}{l_x l_y} - 8 \frac{m_{yo}}{l_y^2} = -p$$

som ganget med  $-l_x l_y / 2$  giver

$$\left[ 1 + 4 \frac{l_y}{l_x} \right] m_{xo} + \left[ 1 + 4 \frac{l_x}{l_y} \right] m_{yo} = \frac{1}{2} p l_x l_y$$

der kan bruges til beregning af den lastintensitet  $p$  som svarer til givne værdier for de frie bøjningsmomenter  $m_{xo}$  og  $m_{yo}$ . Den herved beregnede værdi af  $p$  er en nedrev værdi, hvis snitkræfterne overalt opfylder flydebetingelsen, der med  $m'_{ux} = \frac{1}{2} m_{ux}$  og  $m'_{uy} = \frac{1}{2} m_{uy}$  indsat i de tidligere fundne krav bliver

$$(m_{ux} - m_x)(m_{uy} - m_y) - m_{xy}^2 \geq 0 \quad \text{og}$$

$$(\frac{1}{2} m_{ux} + m_x)(\frac{1}{2} m_{uy} + m_y) - m_{xy}^2 \geq 0$$

Vælges fuld udnyttelse af armeringen ved plademidte, hvor  $m_{xy} = 0$ , er

$$m_{xo} = m_{ux} \quad \text{og} \quad m_{yo} = m_{uy}$$

og indsættes de hertil svarende værdier for snitkræfterne i flydebetingelsens to krav, viser en udregning, at det første krav er opfyldt overalt i pladen, og at det andet krav er opfyldt overalt undtagen i nogle meget små områder helt ude i pladens hjørner. F.eks. i det hjørne, hvor  $x = +l_x/2$  og  $y = +l_y/2$ , fås

$$m_x = m_y = 0 \quad \text{og} \quad m_{xy} = -\frac{1}{4} (m_{ux} + m_{uy})$$

og indsættes i flydebetingelsens andet krav fås uligheden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_{ux} + \frac{1}{2}m_{uy} - \frac{1}{16}(m_{ux} + m_{uy})^2 \\ & = -\frac{1}{16}(m_{ux}^2 + m_{uy}^2 - 2m_{ux}m_{uy}) \\ & = -\frac{1}{16}(m_{ux} - m_{uy})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

som kun er opfyldt for  $m_{ux} = m_{uy}$ , dvs. for den isotrope plade. De områder, hvor kravet ikke er opfyldt er imidlertid så små, at den lastintensitet  $p$ , som fås med  $m_{xo} = m_{ux}$  og  $m_{yo} = m_{uy}$  i pladens ligevægtsligning, kan regnes at være en nedreværdi for bæreevnen.

Reaktionerne bestemmes ved at differentiere snitkræfterne og indsætte i de udtryk, som blev fundet i afsnittet "reaktioner". Herved fås f.eks.

$$r_y = \frac{\delta m_x}{\delta x} + 2 \frac{\delta m_{xy}}{\delta y} = -\frac{8x}{l_x^2} m_{xo} - \frac{2x}{l_x l_y} (m_{xo} + m_{yo})$$

Indsættes  $x = -l_x/2$  fås, at reaktionen langs side 3 (se figur 22) og den på grund af symmetri lige så store reaktion langs side 1 er

$$r_1 = r_3 = \frac{1}{l_y} \left[ (1 + 4 \frac{l_y}{l_x}) m_{xo} + m_{yo} \right]$$

der med resultatet fra pladens ligevægtsligning kan skrives

$$r_1 = r_3 = \frac{1}{2} p l_x - 4 m_{yo} \frac{l_x}{l_y^2}$$

Tilsvarende fås reaktionerne langs siderne 2 og 4

$$r_2 = r_4 = \frac{1}{2} p l_y - 4 m_{xo} \frac{l_y}{l_x^2}$$

Desuden er pladen i hvert hjørne påvirket af en nedadrettet hjørnekraft med størrelsen

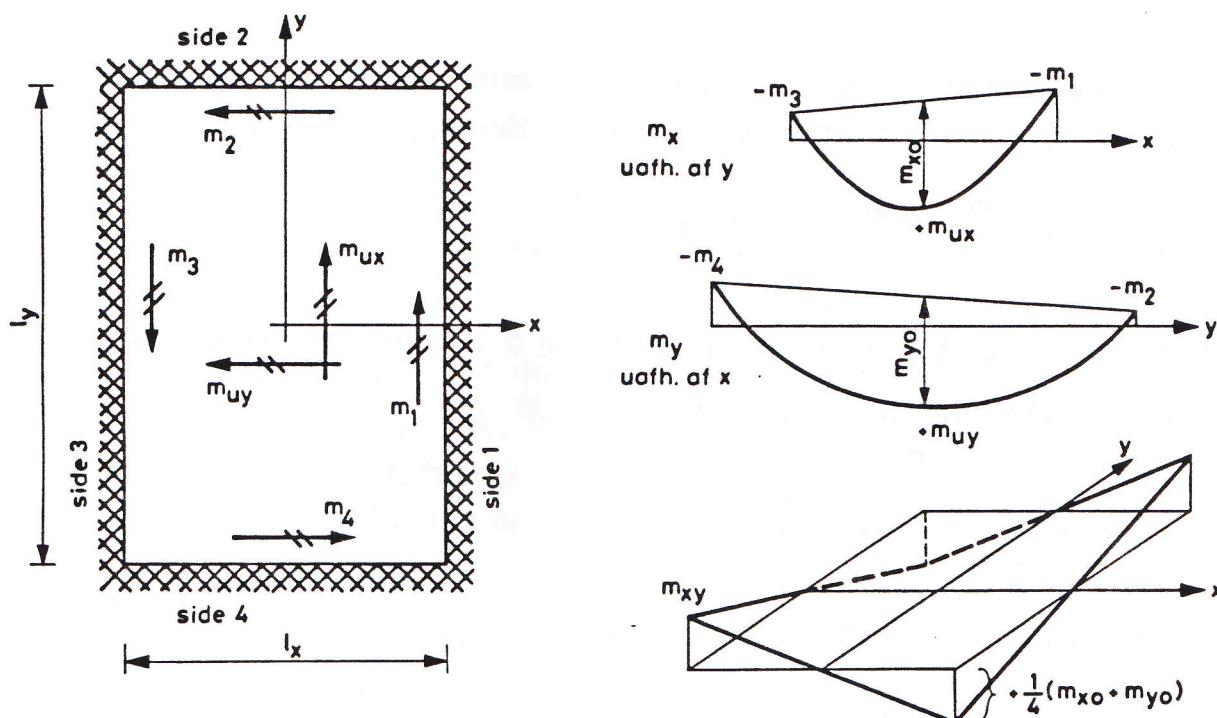
$$F = 2 |m_{xy}| = 2(m_{xo} + m_{yo}) \frac{|xy|}{l_x l_y} = \frac{1}{2} (m_{xo} + m_{yo})$$

idet  $|x| = l_x/2$  og  $|y| = l_y/2$  i hjørnerne.

## Rektangulær plade med indspændinger

Hvis den rektangulære plade har indspændte sider, kan man benytte den i figur 23 viste snitkraftfordeling. Langs siderne virker indspændingsmomenterne  $m_1, m_2, m_3$  og  $m_4$ , og indspændingsgraden "i" defineres som forholdet mellem indspændingsmomentet og det tilsvarende positive flydemoment, dvs.

$$i_1 = \frac{m_1}{m_{ux}}, \quad i_2 = \frac{m_2}{m_{uy}}, \quad i_3 = \frac{m_3}{m_{ux}}, \quad \text{og} \quad i_4 = \frac{m_4}{m_{uy}}$$



Figur 23. Snitkræfter i plade med indspændinger

Af figur 23 fremgår, at de frie bøjningsmomenter kan skrives

$$m_{xo} = m_{ux} + \frac{m_1 + m_3}{2} = m_{ux} \left[ 1 + \frac{i_1 + i_3}{2} \right]$$

$$m_{yo} = m_{uy} + \frac{m_2 + m_4}{2} = m_{uy} \left[ 1 + \frac{i_2 + i_4}{2} \right]$$

hvor  $i=0$ , hvis den pågældende side er simpelt understøttet.

Benyttes den i figur 23 viste snitkraftfordeling i pladens ligevægtsligning, fås som for den simpelt understøttede plade at bæreevnen  $p$  for givne værdier af  $m_{x_0}$  og  $m_{y_0}$  bestemmes af ligningen

$$\left[ 1 + 4 \frac{l_y}{l_x} \right] m_{x_0} + \left[ 1 + 4 \frac{l_x}{l_y} \right] m_{y_0} = \frac{1}{2} p l_x l_y$$

og denne værdi er en nedrev værdi for  $p$ , da det viser sig at også her er flydebetingelsen opfyldt bortset fra nogle mindre områder i pladens hjørner [7].

Derimod bliver reaktionerne ikke parvis lige store, men

$$\begin{cases} r_1 \\ r_3 \end{cases} = \frac{1}{2} p l_x - 4 m_{y_0} \frac{l_x}{l_y^2} \pm \frac{m_1 - m_3}{l_x}$$

$$\begin{cases} r_2 \\ r_4 \end{cases} = \frac{1}{2} p l_y - 4 m_{x_0} \frac{l_y}{l_x^2} \pm \frac{m_2 - m_4}{l_y}$$

Det ses at er  $m_1 > m_3$  bliver  $r_1 > r_3$ , dvs. reaktionen er størst langs den af de to sider, der har størst indspændingsmoment. Hjørnekræfterne, der kun afhænger af  $m_{xy}$ , er stadig

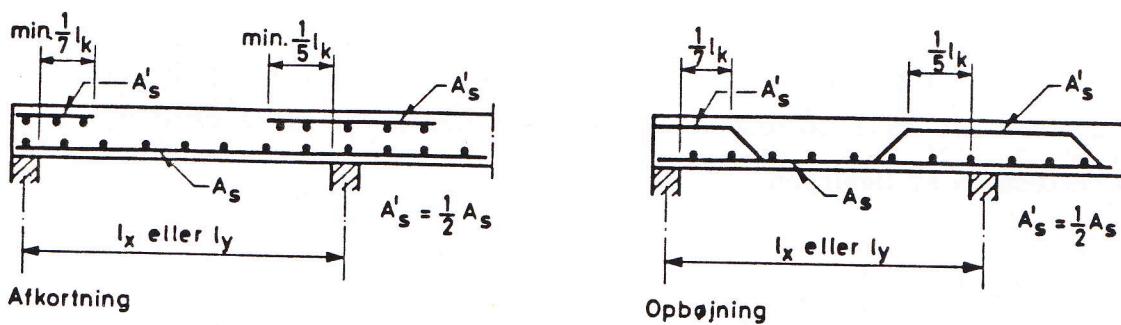
$$F = \frac{1}{2}(m_{x_0} + m_{y_0})$$

Af hensyn til faren for den tidligere omtalte opskydning har DS 411 begrænset størrelsen af indspændingsgraden til

$$i \leq \begin{cases} 0,5 \\ \frac{0,64}{0,36 + \frac{p - p_{min}}{p_{min}}} \end{cases}$$

hvor  $p$  = max. regn.m. lastintensitet og  $p_{min}$  = min. regn.m. lastintensitet på pladen, når nabopladen har max. last.

Det skal her bemærkes, at ifølge lastnormen DS 410 (rettelse til N12) regnes egenlast fra ikke-bærende vægge og gulvbelægninger som fri last, dvs. de indgår ikke i den bundne last  $p_{min}$ .



**Figur 24.** Oversidearmering i normens metode.  
 $l_k$  er den mindste af siderne  $l_x$  og  $l_y$

Anvendes normens metode skal pladens oversidearmering, der er halvdelen af undersidearmeringen, have en udstrækning fra understøtningens kant på  $l_k/7$  ved simple understøtninger og  $l_k/5$  ved indspændte sider, hvor  $l_k$  er den korteste af det pågældende rektangulære felts to sidelængder  $l_x$  og  $l_y$ . Som vist i figur 24 kan man enten afkorte oversidearmeringen eller opbøje undersidearmeringen.

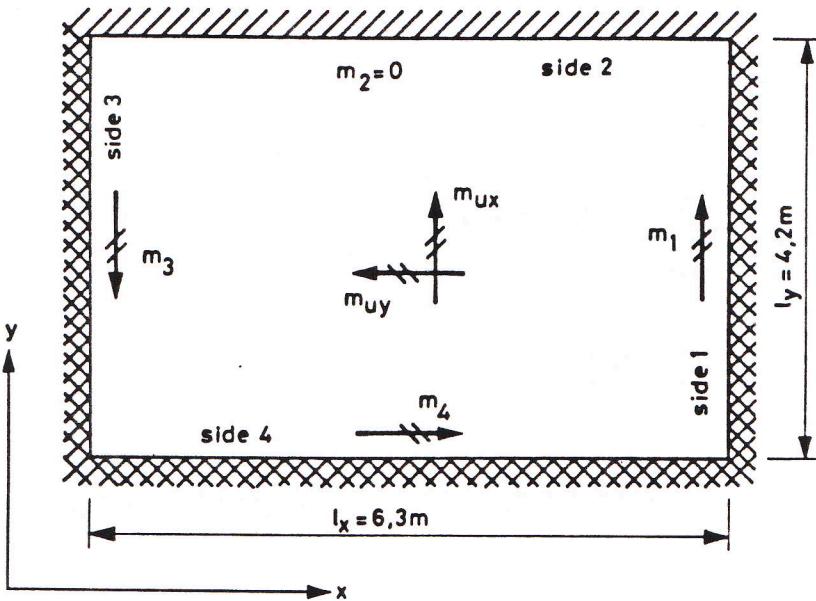
Anvendelsen af normens metode fremgår af eksempel 3.

### Eksempel 3. Nedrev værdi for rektangulær plade

En rektangulær betonplade med sidelængderne 6,3 m og 4,2 m er simpelt understøttet på den ene side og indspændt på de tre andre som vist i figur 25. Pladen armeres i undersiden så  $m_{uy} = m_u$  og  $m_{ux} = 0,5 m_u$ , og halvdelen af armeringen bøjes op ved understøtningerne, som vist i figur 24. Pladetykkelsen er 100 mm. Pladen påvirkes af følgende ensformigt fordelte laster

egenvægt af plade	$0,1 \cdot 24 =$	$2,4 \text{ kN/m}^2$
egenlast fra gulvbelægninger		$0,5 \text{ kN/m}^2$
egenlast fra ikke-bærende skillevægge		$0,5 \text{ kN/m}^2$
nyttelast, hvoraf halvdelen er fri last,		$4,0 \text{ kN/m}^2$

Bestem ved normens metode den værdi af  $m_u$ , som pladen skal dimensioneres for. Beregn desuden størrelsen af reaktionerne, når der armeres i y-retningen svarende til den fundne værdi af  $m_u$  og i x-retningen svarende til flydemomentet 5,2 kNm/m.



Figur 25. Rektangulær plade

Referencer  
DS 409  
tabel 5.2

Regningsmæssig last med  $\gamma=1,0$  på permanent last og  $\gamma=1,3$  på nyttelast er

$$p = 1,0(2,4+0,5+0,5)+1,3 \cdot 4,0 = 8,60 \text{ kN/m}^2$$

Side 41

Da lette skillevægge og gulvbelægninger er fri last, er den bundne last

$$p_{\min} = 1,0 \cdot 2,4 + \frac{1}{2} 1,3 \cdot 4,0 = 5,00 \text{ kN/m}^2$$

Indspændingsgrad

$$i = \begin{cases} 0,5 \\ \frac{0,64}{0,36 + \frac{p - p_{\min}}{p_{\min}}} = \frac{0,64}{0,36 + \frac{8,60 - 5,00}{5,00}} = 0,59 \end{cases}$$

Side 40

Med  $i_1 = i_3 = i_4 = 0,5$  og  $i_2 = 0$  fås

$$m_1 = m_3 = 0,5 \text{ m}_{ux},$$

$$m_2 = 0 \text{ og } m_4 = 0,5 \text{ m}_{uy}$$

og de frie bøjningsmomenter

$$m_{xo} = m_{ux} + \frac{0,5+0,5}{2} m_{ux} = 1,5 m_{ux}$$

$$m_{yo} = m_{uy} + \frac{0+0,5}{2} m_{uy} = 1,25 m_{uy}$$

### Nødvendigt flydemoment

Bæreevneformlen giver

Side 41

$$\left[ 1+4 \frac{l_y}{l_x} \right] m_{xo} + \left[ 1+4 \frac{l_x}{l_y} \right] m_{yo} = \frac{1}{2} p l_x l_y$$

$$\left[ 1+4 \frac{4,2}{6,3} \right] 1,5 m_{ux} + \left[ 1+4 \frac{6,3}{4,2} \right] 1,25 m_{uy} = \frac{1}{2} p 6,3 \cdot 4,2$$

$$5,50 m_{ux} + 8,75 m_{uy} = 13,23 p$$

Indsættes værdierne for  $m_{ux}$ ,  $m_{uy}$  og  $p$  fås

$$5,50 \cdot 0,5 m_u + 8,75 m_u = 13,23 \cdot 8,60$$

der giver  $m_u = 9,89 \text{ kNm/m}$

dvs. lidt større end  $m_u = 9,4 \text{ kNm/m}$  i eksempel 2.

### Valgte flydemomenter

Som ovenfor nævnt armeres svarende til

$$m_{uy} = 9,89 \text{ kNm/m} \text{ og } m_{ux} = 5,2 \text{ kNm/m}$$

som i bæreevneformlen giver

$$5,50 \cdot 5,2 + 8,75 \cdot 9,89 = 13,23 p_u \Rightarrow p_u = 8,70 \text{ kN/m}^2$$

### Reaktioner

Da momenterne

$$m_{xo} = 1,5 m_{ux} = 1,5 \cdot 5,2 = 7,80 \text{ kNm/m} \text{ og}$$

$$m_{yo} = 1,25 m_{uy} = 1,25 \cdot 9,89 = 12,36 \text{ kNm/m}$$

svarer til en bæreevne  $p_u$ , der er større end den regningsmæssige last  $p$ , og da reaktionerne ønskes svarende til  $p$ , reduceres momenterne ved at gange dem med  $p/p_u$ .

Side 41

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r_1 \\ r_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} p l_x - 4 m_{y_0} \frac{p}{p_u} \cdot \frac{l_x}{l_y^2} \pm \frac{m_1 - m_3}{l_x} \cdot \frac{p}{p_u} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8,60 \cdot 6,3 - 4 \cdot 12,36 \cdot \frac{8,60}{8,70} \cdot \frac{6,3}{4,2^2} \pm \frac{0}{6,3} \cdot \frac{8,60}{8,70} = 9,64 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \end{aligned}$$

idet  $m_1 = m_3$ .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r_2 \\ r_4 \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} p l_y - 4 m_{x_0} \frac{p}{p_u} \cdot \frac{l_y}{l_x^2} \pm \frac{m_2 - m_4}{l_y} \cdot \frac{p}{p_u} \\ &= \frac{1}{2} 8,60 \cdot 4,2 - 4 \cdot 7,80 \frac{8,60}{8,70} \cdot \frac{4,2}{6,3^2} \pm \frac{0 - 0,5 \cdot 9,89}{4,2} \cdot \frac{8,60}{8,70} = \begin{cases} 13,63 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ 15,96 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \end{cases} \end{aligned}$$

De fire hjørnekraeftter svarende til  $p$  er

$$F = \frac{1}{2} (m_{x_0} + m_{y_0}) \frac{p}{p_u} = \frac{1}{2} (7,80 + 12,36) \frac{8,60}{8,70} = 9,96 \text{ kN}$$

### Kontrol

$$\text{Pladens totallast} = p l_x l_y = 8,60 \cdot 6,3 \cdot 4,2 = 227,6 \text{ kN}$$

Summen af reaktionerne er

$$\begin{aligned} &(r_1 + r_3) l_y + (r_2 + r_4) l_x - 4F \\ &= (9,64 + 9,64) 4,2 + (13,63 + 15,96) 6,3 - 4 \cdot 9,96 = 227,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

dvs. lodret ligevægt er i orden.

## NEDREVÆRDIER VED STRIMMELMETODEN

Nedreværdiløsninger kan også fås ved at se bort fra vridningsmomenterne i pladen, dvs. sætte  $m_{xy} = 0$ .

Med  $m_{xy} = 0$  bliver den fysiske betingelse, flydebetingelsen, reduceret til

$$\left. \begin{array}{l} (m_{ux} - m_x)(m_{uy} - m_y) \geq 0 \\ \text{og } (m'_{ux} + m_x)(m'_{uy} + m_y) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -m'_{ux} \leq m_x \leq m_{ux} \\ \text{og } -m'_{uy} \leq m_y \leq m_{uy} \end{array}$$

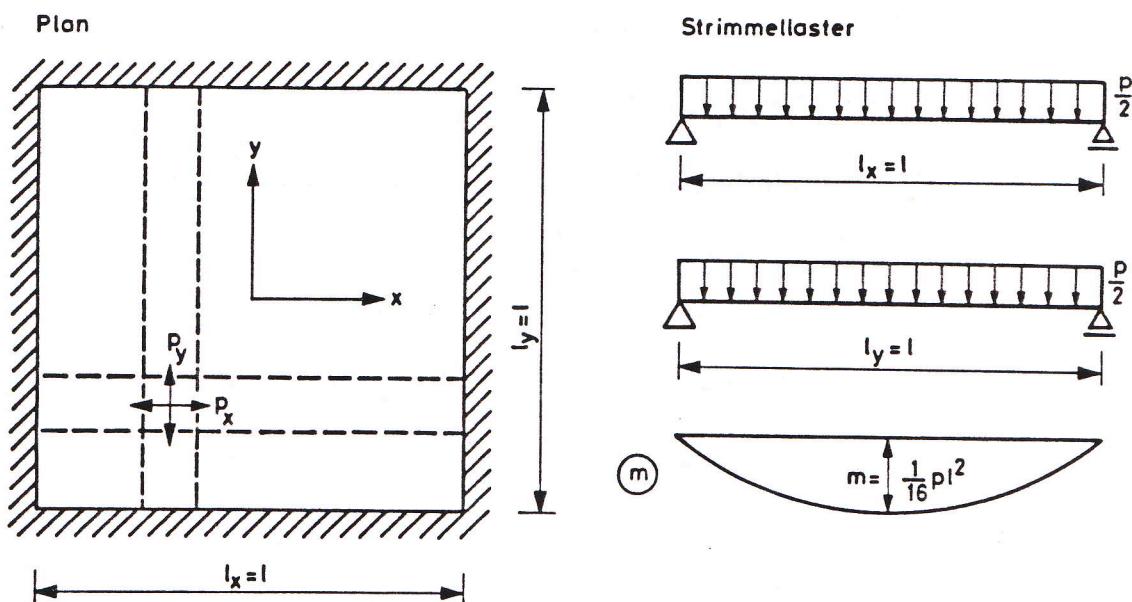
Den statiske betingelse, pladens ligevægtsligning, reduceres til

$$\frac{\delta^2 m_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 m_y}{\delta y^2} = -p$$

der også kan skrives

$$\frac{\delta^2 m_x}{\delta x^2} = -p_x \quad \text{og} \quad \frac{\delta^2 m_y}{\delta y^2} = -p_y, \quad \text{hvor } p_x + p_y = p$$

dvs. fladelasten  $p$  på pladen eller på en del af pladen kan deles i  $p_x$ , som bæres ved bøjningsmomenter i snit med snitnormal i  $x$ -retningen, og  $p_y$ , som bæres ved bøjningsmomenter i snit med snitnormal i  $y$ -retningen. Det kan udtrykkes simpelere ved at sige, at  $p_x$  bæres ved at pladen spænder i  $x$ -retningen og  $p_y$  ved at pladen spænder i  $y$ -retningen. Retningerne, som pladen spænder i, markeres med dobbelte pile, som vist i figur 26.



Figur 26. Kvadratisk plade opdelt i strimler

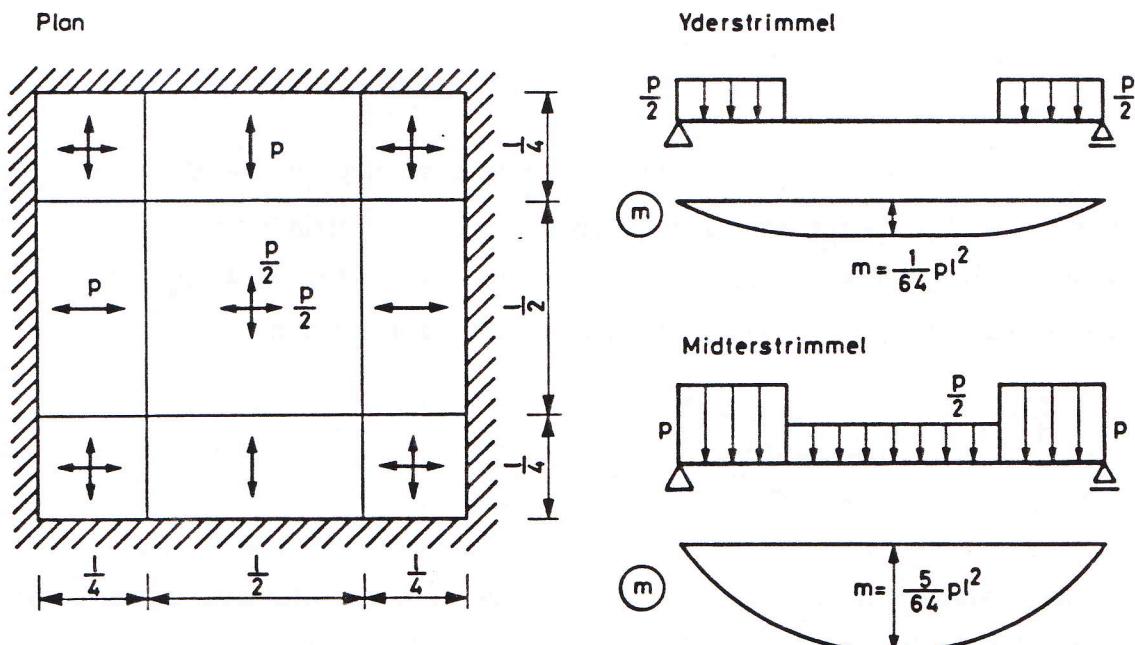
Tænkes pladen opdelt i strimler i de to retninger, bæres lastdelen  $p_x$  af strimlerne i x-retningen, og lastdelen  $p_y$  af strimlerne i y-retningen. Metoden kaldes Hillerborgs strimmelmetode efter professor Hillerborg, Lund, som udviklede metoden i 1950erne [8].

Metoden giver nedreværdiløsninger, da de geometriske betingelser ikke er opfyldt. Således har to strimler, der krydser hinanden, ikke altid samme nedbøjning i krydsningspunktet.

Strimmelmetoden kan give bæreevner, der er væsentligt mindre end den korrekte bæreevne. For eksempel fås for pladen i figur 26 med  $p_x = p_y = \frac{1}{2}p$  og med  $m_{ux} = m_{uy} = m_u$ , at bæreevnen er udtømt, når bøjningsmomenterne ved plademidte bliver

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} l^2 = m_u \Rightarrow p_u^- = 16 \frac{m_u}{l^2}$$

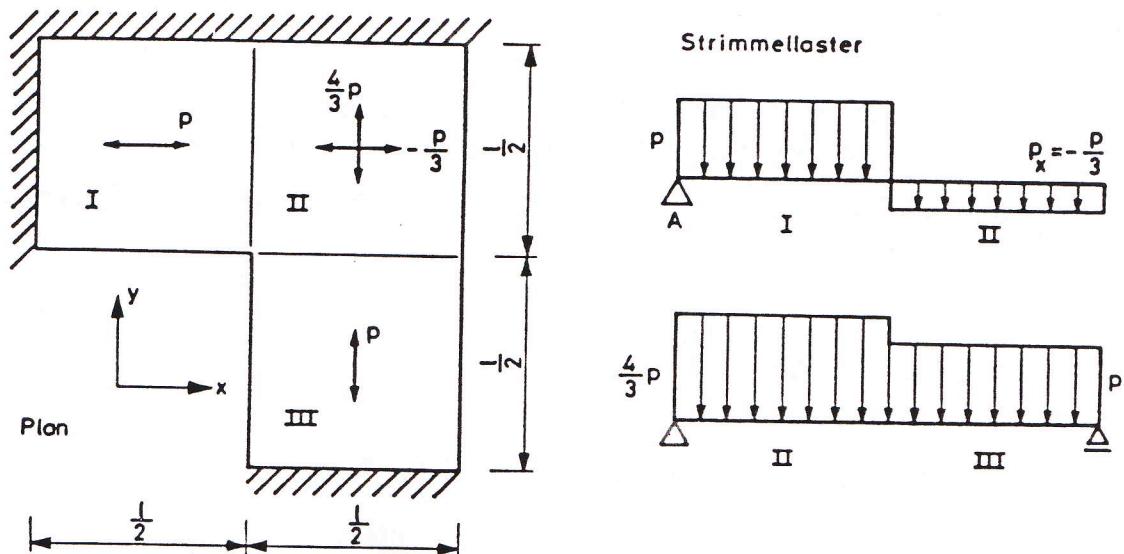
hvilket er noget mindre end den korrekte værdi  $p_u = 24 m_u / l^2$  [4].



Figur 27. Kvadratisk plade med strimmelzoner

De yderste og de midterste strimler kan derimod belastes forskelligt, f.eks. som vist i figur 27, hvor de yderste strimler skal armeres for momentet  $pl^2/64$  og de midterste for  $5l^2/64$ . Da yder- og midterzoner har samme areal, armeres i gen-

nemsnit for momentet  $3pl^2/64$ , dvs. noget mindre end  $m_u = pl^2/16 = 4pl^2/64$  for pladen i figur 26. Ved at opdele pladen i zoner, benytte forskellige værdier af  $p_x$  og  $p_y$  i de forskellige zoner, og armere midterzonerne kraftigere end yderzonerne, er der således for pladen i figur 27 opnået at spare på armeringen i forhold til pladen i figur 26.



Figur 28. Plade med negativ dellast i zone II

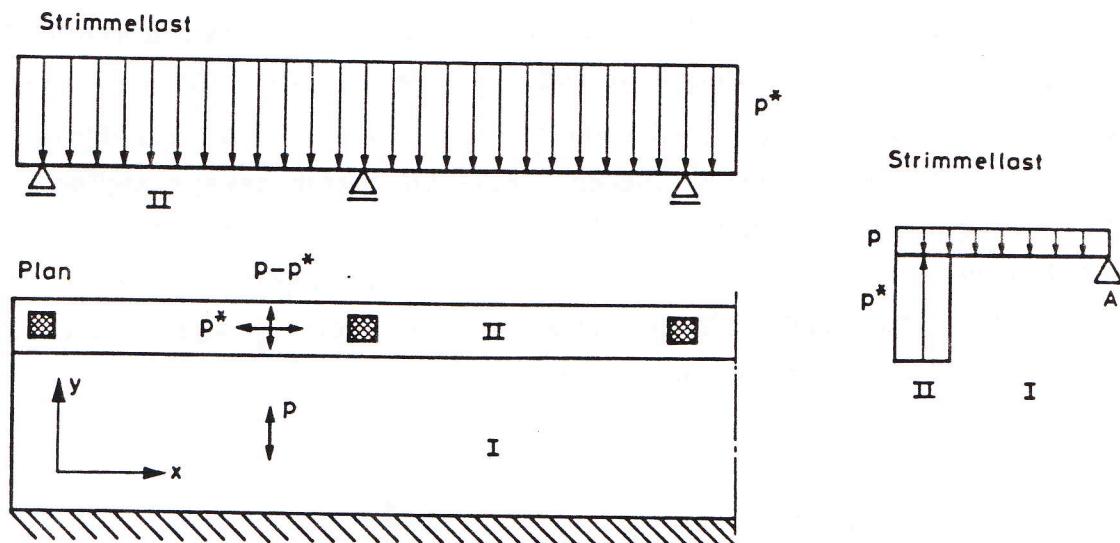
Som vist i figur 28 er det også muligt at benytte en negativ værdi af f.eks.  $p_x$ , hvilket svarer til at strimlerne i x-retningen hviler på strimlerne i y-retningen. Det er dog nødvendigt at  $p_x + p_y = p$  indenfor hver zone. Værdien af  $p_x$  i zone II i figur 28 findes ved moment om A for en strimmel i x-retningen:

$$p \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + p_x \frac{l}{2} \cdot \frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow p_x = -\frac{p}{3}$$

$$\text{og da } p_x + p_y = p \text{ fås } p_y = \frac{4}{3}p$$

I figur 29 er vist en altanplade, der i zone I er enkeltspændt med lasten  $p$  og i zone II dobbeltspændt med  $p_y = p - p^*$  og  $p_x = p^*$  hvor  $p^*$  kan bestemmes ved moment om A for en strimmel i y-retningen. En linielast langs den fri rand, som kræves i lastnormen DS 410, er for nemheds skyld ikke medtaget.

Hvis altanpladen ikke gøres tykkere i zone II end i zone I, kaldes zone II en skjult bjælke.



Figur 29. Altanplade med skjult bjælke  
Linielast langs fri rand er ikke vist

### PLADETEORIENS BEGRÆNSNING

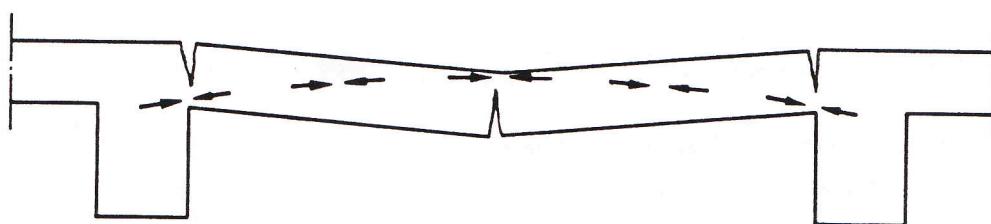
Ovenfor er beskrevet, hvordan man kan beregne øvreværdier ved brudlinieteorien og nedreværdier ved normens metode eller strimmelmetoden. Den korrekte værdi for en armeret betonplades bæreevne skulle så ligge mellem øvre- og nedreværdierne. Om det virkelig er tilfældet, kan kontrolleres ved forsøg.

To forsøg med belastning til brud af betonplader i en kun 10 år gammel bygning, som alligevel skulle rives ned, blev foretaget i Johannesburg i 1952 [9] under ledelse af New Zealænderen Allan Ockleston, professor ved universitetet i Johannesburg. K.W. Johansens brudlinieteori var nået til Sydafrika, og Ockleston ville sammenligne teori og praksis. Resultatet af to pladeforsøg blev ret chokerende, da brudlasten i begge tilfælde viste sig at være ca. 3 gange den beregnede værdi.

I 1981 skulle en 30 år gammel fabriksbygning i Søborg rives ned, og et hold studerende ved DIAB under ledelse af V. Trier Frederiksen og forfatteren belastede to betonplader til brud. Brudlasten var her 2,9 og 2,4 gange brudlinieteoriens øvreværdi, [10] og [11].

## Trykmembranvirkning

Forklaringen på de høje brudlaster er, at der dannes en trykmembran i pladen. Da trykzonehøjden  $h_c$  er lille i forhold til pladetykkelsen (ofte er  $h_c = \text{ca.} 0,1h$ ), ligger nulllinien ikke midt i pladetykkelsen, og træksiden forlænges derfor meget mere end tryksiden forkortes. Pladens rande vil derfor bevæge sig udad. Hvis denne bevægelse forhindres af kantbjælker og naboplader, dannes der en trykmembran i pladen, som vist i figur 30. Denne effekt optræder ikke i stålplader, da nulllinien her ligger midt i pladetykkelsen ( $h_c = 0,5h$ ) for ren bøjning. Derimod kan der optræde trækmembranvirkning i stålplader.

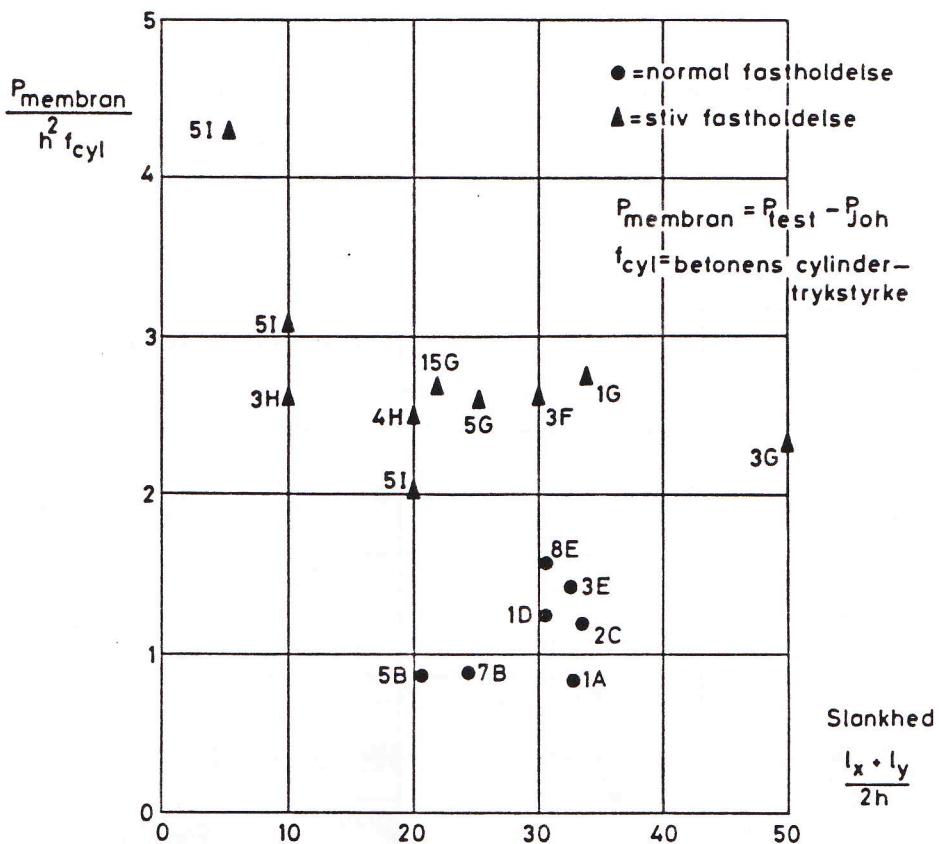


Figur 30. Trykmembran i plade med vandret fastholdelse

Hvor meget bæreevnen forøges på grund af trykmembranvirkningen, også kaldet kuppelvirkningen, er blevet bestemt ved forsøg og ved beregning. I figur 31 er vist resultatet af 76 forsøg foretaget otte forskellige steder i verden [10]. Som ordinat er ikke anvendt faktoren  $P_{\text{test}}/P_{\text{Joh}}$ , hvor  $P_{\text{Joh}}$  er bæreevnen beregnet efter Johansens brudlinieteori, da den faktor er meget varierende. Den er f.eks. lig uendelig for en uarmeret betonplade. I stedet er anvendt ordinaten  $P_{\text{membran}} = P_{\text{test}} - P_{\text{Joh}}$ , og den er gjort dimensionsløs ved division med de mest afgørende parametre, pladetykkelsen  $h$  og betonens cylindertrykstyrke  $f_{\text{cyl}}^*$ . Punkt 2C er gennemsnittet af Ocklestons to forsøg, punkt 1D er det ene af forsøgene i Søborg, og de resterende 73 er laboratorieforsøg.

Desværre er mange af laboratorieforsøgene foretaget med plader med en vandret fastholdelse, der er væsentlig stivere end almindeligt forekommende i praksis. Ser man bort fra disse forsøg, der er markeret ved sorte trekantede i figur 31, finder man at de resterende punkter har ordinater på ca. 1 eller lidt mere. Trier

\*  $f_{\text{cyl}}$  er gennemsnittet af de målte cylindertrykstyrker, dvs. lidt større end  $f_{\text{ck}}$ .



Figur 31. Resultat af 76 forsøg med rektangulære plader med vandret fastholdelse på alle fire sider.  
Tallet ved siden af et punkt er antal forsøg.

Frederiksen og forfatteren [10] konkluderede derfor at membranvirkningen giver brudlasten en forøgelse, der med god tilnærmelse er

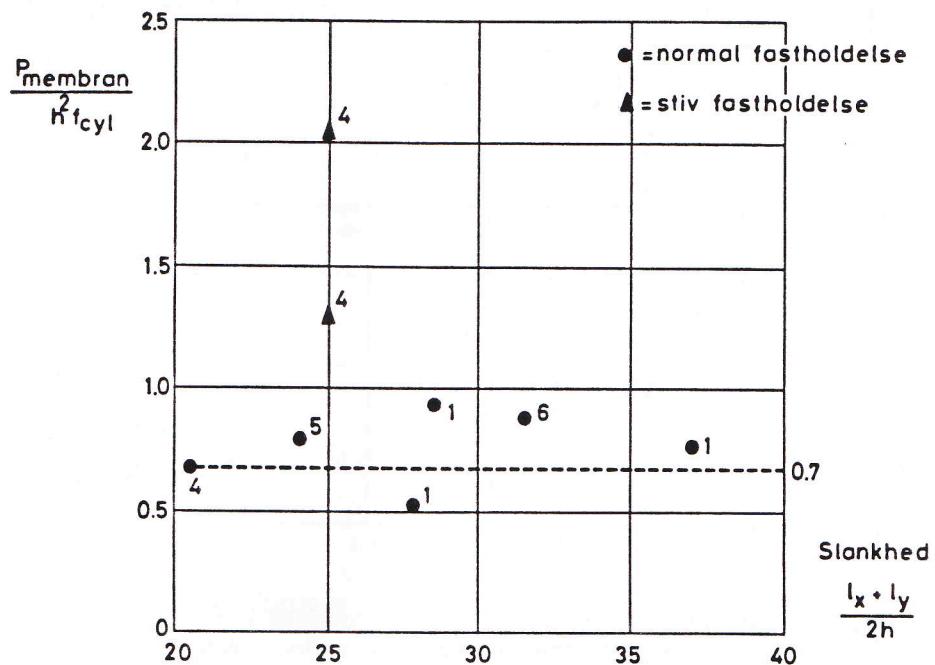
$$P_{membran} = h^2 f_{cyl}$$

Man kan derfor regne med, at en rektangulær betonplade, der har vandret fastholdelse på alle fire sider i form af naboplader eller kraftige kantbjælker, har en regningsmæssig bæreevne svarende til den ensformigt fordelede last

$$P_u = P_{joh} + \frac{P_{membran}}{l_x l_y} = P_{joh} + \frac{h^2 f_{cd}}{l_x l_y}$$

hvor  $P_{joh}$  er den pladeteoretiske last, Johansenlasten, og  $l_x$  og  $l_y$  er pladens sidelængder.

En beregning af bidraget fra membranvirkningen til brudlasten foretaget af forfatteren [12] gav nogle komplikerede udtryk, men de efterviste, at  $h^2 f_{cyl}$  er en god tilnærmelse.



Figur 32. Resultat af 26 forsøg med rektangulære plader med vandret fastholdelse på tre af fire sider.  
Tallet ved siden af et punkt er antal forsøg.

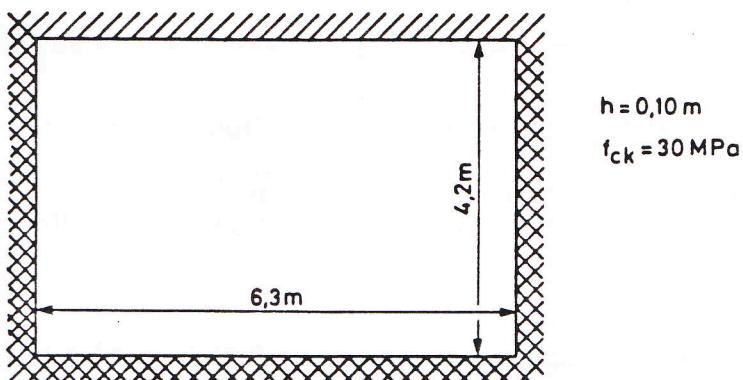
Hvis en rektangulær betonplade kun har vandret fastholdelse på tre af de fire sider, bliver membranvirkningen mindre, men stadig væsentlig. Den ene af de to plader fra Søborgforsøgene havde kun fastholdelse på tre sider og en brudlast på 2,4 gange brudlinieteoriens øvværdi. Trykmembranvirkningens bidrag til pladens brudlast var  $0,92 h^2 f_{cyl}$ . V. Trier Frederiksen og forfatteren [11] fandt på grundlag af de 26 pladeforsøg vist i figur 32, at for rektangulære betonplader med vandret fastholdelse på tre sider kan den regningsmæssige bæreevne for ensformigt fordelt last bestemmes ved

$$P_u = P_{Joh} + 0,70 \frac{h^2 f_{cd}}{l_x l_y}$$

#### Eksmpel 4. Bæreevne med trykmembranvirkning

Den rektangulære plade, som blev dimensioneret i eksmpel 3, er vist i figur 33. Pladen er indspændt i naboplader på tre sider og hviler på den fjerde side på en muret væg. Ifølge eksmpel 3 er pladens regningsmæssige bæreevne  $8,7 \text{ kN/m}^2$  bestemt ved normens metode med pladen i normal sikkerhedsklasse og udført med normal kontrol.

Bestem pladens regningsmæssige bæreevne, når membranvirkningen medregnes.



Figur 33. Rektangulær plade

#### Referencer

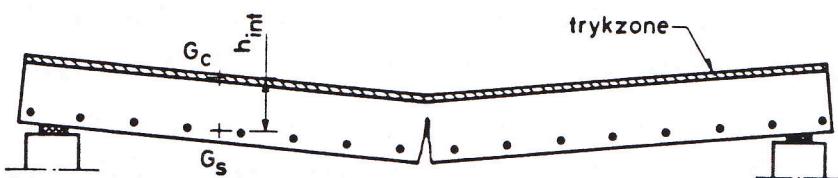
Pladen har vandret fastholdelse på 3 sider, og nedreværdien  $8,7 \text{ kN/m}^2 \leq p_{Joh}$ . Med  $f_{cd} = 30/1,8 = 16,7 \text{ MPa}$  fås den regningsmæssige bæreevne

Side 52

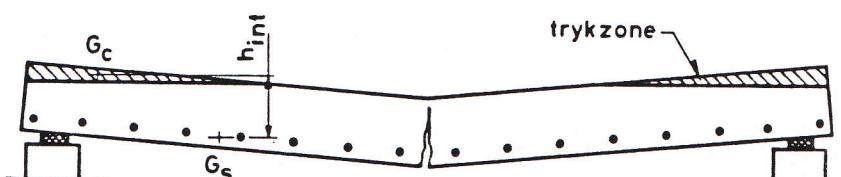
$$p_u = p_{Joh} + 0,7 \frac{h^2 f_{cd}}{l_x l_y} = 8,7 + 0,7 \frac{0,1^2 \cdot 16,7}{6,3 \cdot 4,2} \cdot 10^3 = 8,7 + 4,4 = 13,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

#### Kempeffekten

Ifølge pladeteorien er der kun tre snitkræfter,  $v_x$ ,  $m_x$  og  $m_{xy}$ , og blandt andet normalkraften skulle være nul, se figur 4. Det vil sige at på enhver kort snitlængde skal trykkraften i trykzonen have samme størrelse som trækraften i trækzonen, se figur 34. Det kan imidlertid vises [13], at i et snit i en flydelinie



Pladeteoretisk spændingsfordeling



Virkelig spændingsfordeling

Figur 34. Spændingsfordelinger i plade.

er trykzonens underkant, nulllinien, altid vandret\*. Når pladen får en nedbøjning, flytter trækcentret  $G_s$  derfor mere nedad end trykcentret  $G_c$ , og den indre momentarm  $h_{int}$  bliver som vist i figur 34 større end svarende til pladeteorien.

Denne effekt er her kaldt Kempeffekten, da den er blevet påvist af professor K.O. Kemp, London [14]. Kemp viste, at for nedbøjninger mindre end  $0,6 h_{ef}$  og for et mekanisk armeringsforhold  $\Phi \leq 0,125$ , hvilket oftest er tilfældet, skulle effekten give en forøgelse af bæreevnen på 20% af brudlinieteoriens værdi. I modsætning til trykmembranvirkningen er det vanskeligt at kontrollere Kempeffektenes størrelse ved forsøg, dels fordi virkningen kun giver 20% ekstra last, og dels fordi friktion ved understøtningerne giver vandrette kræfter og dermed membranvirkning.

Den i figur 34 viste trekantede trykzone i de positive flydelinier forekommer også i plader med vandret fastholdelse, når deres nedbøjning er tilstrækkelig stor. Forskellen i bæreevne skyldes at trykzonen kan blive meget større, når pladen holdes sammen af den ydre fastholdelse og ikke blot af de indre kræfter i trækarmeringen.

---

\* Trykzonen er her defineret som den del af tværsnittet, hvor betontøjningen  $\epsilon_c$  (forkortelse regnet positiv) er voksende (se [12]), og pladedelenes øjeblikkelige drejningsakser er forudsat vandrette.

## LITTERATURFORTEGNELSE

- [1] A.Stæhr-Jørgensen: "Konstruktionslære - Betonkonstruktioner", DIAB 1984.
- [2] K.W. Johansen: "Brudlinieteorier" - Gjellerup, 1943.
- [3] M.P. Nielsen: "Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs" Acta Polytech. Scand., Ser.No.26, 1964.
- [4] M.P. Nielsen: "Limit Analysis and Concrete Plasticity", Prentice-Hall Series, USA, 1984.
- [5] M.P. Nielsen og A. Rathkjen: "Skiver og plader" Mekanik 5.1, del 2, Aalborg/København, 1981.
- [6] E.N. Fox: "The exact solution for a clamped square plate of isotropic homogeneous material obeying the square yield criterion and loaded by uniform pressure", Phil. Trans. Royal Soc., A. Math.Phys.Sci., Vol. 277, No. 1265, August 1974.
- [7] Finn Bach og M.P. Nielsen: "Nedreværdiløsninger for jernbetonplader", Afd. for Bærende Konstruktioner, DTH, Serie R, No. 136, 1981.
- [8] A. Hillerborg: "Strimmelmetoden", Stockholm, Svenska Riks-byggen, 1959.
- [9] A.J. Ockleston: "Loading tests on reinforced concrete slabs spanning in two directions", Portland Cement Institute, Johannesburg, 1958.
- [10] K.P. Christiansen og V. Trier Frederiksen: "Experimental investigation of rectangular concrete slabs with horizontal restraints", Materials and structures, Vol. 16, No. 93, 1983.
- [11] K.P. Christiansen og V. Trier Frederiksen: "Tests on rectangular concrete slabs with horizontal restraints on three sides only" Nordic Concrete Research, 1982.
- [12] K.P. Christiansen: "Ultimate strength of concrete slabs with horizontal restraints", Bygningsstatiske meddelelser, Vol. 54, No. 3, 1983.
- [13] C.T. Morley: "Yield-line theory for RC slabs at moderately large deflections", Magazine of Concrete Research, Vol. 19, No. 61, 1967.
- [14] K.O. Kemp: "Yield of a square reinforced concrete slab on simple supports, allowing for membrane forces", The Structural Engineer, Volume 45, No. 7, 1967.

## ENGELSK-DANSK ORDBOG

*adjacent span* - nabofag  
*admixture* - tilsætningsmiddel  
*aggregate* - tilslagsmateriale  
*alternate spans* - hvert andet fag  
*anchorage* - forankring  
*anchorage length* - forankringslængde  
*at 200 mm centres* - pr. 200 mm  
*axial force* - normalkraft

*B = bottom* - underside  
*bar* - armeringsstang  
*bar schedule* - bukkliste  
*base* - søjlefundament  
*beam* - bjælke  
*bearing* - understøtning  
*bearing capacity* - bæreevne  
*bending moment* - bøjningsmoment,  
snitmoment  
*bent up* - opbøjet (armering)  
*bond* - vedhæftning  
*box girders* - kassedrager  
*buckling* - foldning  
*bundled bars* - bundt af 3 eller  
flere stænger

*cantilever* - udkraget bjælke  
*centroid* - tyngdepunkt  
*characteristic strength* - karakteristi-  
stisk styrke  
*chart* - diagram  
*clamped* - indspændt  
*clear distance* - fri afstand  
*code of practice* - norm  
*cold worked high yield (Y)* - kold-  
bearb., højstyrke (T)  
*column* - søjle

*compatibility* - forenelighed  
(geometrisk overensstemmelse)  
*compression steel* - trykarmering  
*compressive stress* - trykspænding  
*construction joint* - støbeskel  
*continuous* - kontinuerlig  
*contraflexure* - vendetangent ( $M=0$ )  
*corbel* - konsol  
*cover* - dækklag  
*cracking* - revnedannelse  
*creep* - krybning  
*cross section* - tværnsnit  
*cube* - terning  
*curtail* - afkorte  
*curvature* - krumning  
*cylinder* - cylinder

*dead load* - egenlast  
*deck* - etageadskillelse, dæk  
*deflection* - nedbøjning, deformation  
*depth of beam* - bjælkehøjde  
*design* - dimensionering  
*design load* - regningsmæssig last  
*design strength* - regningsmæssig  
styrke  
*deviation* - afvigelse  
*distribution factor* - relativt stiv-  
hedstal  
*distribution steel* - fordelingsarmering  
*doubly reinforced* - med trykarmering  
*durability* - holdbarhed

*eccentricity* - excentricitet  
*EF = each face* - begge sider  
(armering)  
*effective depth* - effektiv højde  
(nyttehøjde)

*elevation* - sidebillede, opstalt  
*end support* - endeunderstøtning  
*envelope* - indhyllingskurve  
*environment* - miljø (omgivelser)  
*equilibrium* - ligevægt  
*exposure conditions* - miljø  
  
*failure mechanism* - brudmekanisme  
*fatigue* - udmattelse  
*FFL = finished floor level* - kote til færdig overflade  
*finish* - slidlag  
*first moment of area* - statisk moment (af areal)  
*fixed* - fast indspændt  
*flange* - flange  
*flat slab* - plade uden ribber (understøttet direkte på søjler)  
*formwork* - forskalling  
*foundation* - fundament  
*foundation block* - fundamentsklods  
*frame* - ramme  
  
*grade of concrete* - betons styrkeklasse  
  
*hogging moment* - negativt bøjningsmoment  
*hinge* - charnier (hængsel)  
*hot rolled high yield steel (Y)* - valset, højstyrke stål (Y, S og K)  
*hot rolled mild steel (R)* - valset, blødt stål (R)  
  
*imposed load* - nyttelast  
*in situ* - støbt på stedet  
*interior support* - mellemunderstøtning  
*isotropically reinforced* - ensarmeret

*lap* - stød, overlapning  
*lateral* - vandret  
*lever arm* - indre momentarm  
*lightweight concrete* - letbeton  
*limit state* - grænsetilstand  
*link* - bøjle (i søjle eller bjælke)  
*load combination* - lasttilfælde  
  
*main bars* - hovedarmering  
*major axis* - 1. hovedakse  
*mass concrete* - grovbeton  
*mid span* - fagmidte  
*minor axis* - 2. hovedakse  
*modulus of elasticity* - elasticitetskoefficient  
*moment distribution method* - Crossmetoden  
  
*N/A = not applicable* - anvendes ikke  
*neutral axis* - nulllinie  
*0.2 % proof stress* - 0,2% spænding  
*one-way slab* - enkelspændt plade  
*overturning* - kipning  
  
*pair of bars* - bundt af 2 stænger  
*partial safety factor* - partial-koefficient  
*partition* - skillevæg  
*PC = prestressed concrete* - spændbeton  
*per* - pr.  
*pitch* - afstand (f.eks. for bøjler)  
*plain concrete* - uarmeret beton  
*plan* - plan (på tegning)  
*plastic hinge* - flydeled  
*plastic moment* - flydemoment  
*point load* - enkeltkraft  
*precast* - præfabrikeret

<i>radius of bend</i> - bukkeradius	<i>standard</i> - standard
<i>radius of curvature</i> - krumningsradius	<i>starters</i> - stritter
<i>radius of gyration</i> - inertiradius	<i>steel percentage</i> - armeringsprocent
<i>RC = reinforced concrete</i> -	<i>stirrup</i> - bøjle (i bjælke)
armeret beton, jernbeton	<i>storey</i> - etage
<i>redistribution</i> - omfordeling	<i>strain</i> - tøjning
<i>reinforcing mesh</i> - armeringsnet	<i>strain profile</i> - tøjningsfordeling
<i>resistance moment</i> - momentbæreevne	<i>stress</i> - spænding
<i>restraint</i> - fastholdelse	<i>stress distribution</i> - spændingsfordeling
<i>rib</i> - krop (af T-bjælke)	<i>stress strain curve</i> - arbejdslinie
<i>rotation capacity</i> - rotations-	<i>strut</i> - trykstang (kort)
kapacitet, flydeevne	<i>subframe</i> - delramme
<i>rupture</i> - brud	<i>support</i> - understøtning
 	<i>support moment</i> - indspændingsmoment
<i>sagging moment</i> - positivt bøj-	<i>sustained load</i> - langtidslast
moment	 
<i>second moment of area</i> -	<i>T = top</i> - overside
inertimoment (af areal)	<i>Tee beam</i> - T-bjælke
<i>secondary reinforcement</i> - fordelings-	<i>tensile stress</i> - trækspænding
armering	<i>tension steel</i> - trækarmering
<i>section</i> - tværsnit, snit	<i>trial and error</i> - iteration
<i>solid</i> - massiv	<i>two-way slab</i> - dobbeltspændt plade
<i>service stress</i> - spænding i	 
brugstilstand	<i>ultimate limit state</i> - brudtilstand
<i>serviceability limit state</i> -	<i>ultimate load</i> - brudlast
brugstilstand	<i>ultimate strength</i> - brudstyrke
<i>SFL = structural floor level</i> -	<i>uniformly distributed load (u.d.l.)</i> -
kote til rå beton	ensformigt fordelt last
<i>shear force</i> - forskydningskraft	 
<i>shear modulus</i> - forskydnings-	<i>void</i> - hulrum
elasticitetskoeff.	<i>web</i> - krop
<i>short term load</i> - korttidslast	<i>width</i> - bredde
<i>shrinkage</i> - svind	<i>wire</i> - streng
<i>shuttering</i> - forskalling	<i>without sway</i> - fastholdt knudepunkts-
<i>simple support</i> - simpel understøtning	figur
<i>slab</i> - plade	<i>working load</i> - brugslast
<i>slender column</i> - slank søjle	<i>yield line</i> - brudlinie
<i>spacing</i> - afstand	<i>yield moment</i> - flydemoment
<i>spall</i> - skalle af	<i>yield stress</i> - flydespænding
<i>span</i> - spændvidde	

## SYMBOLISTE

### Geometriske størrelser

- $a_t$  = stangafstand (midte til midte)  
 $b$  = bredde af tværsnit, målt vinkelret på udbøjningsretningen  
 $c$  = dæktag  
 $d$  = diameter af stænger i hovedarmering  
 $d_t$  = diameter af stænger i fordelingsarmering  
 $h_c$  = betonens trykzonehøjde  
 $h$  = pladetykkelse, højde  
 $h_{ef}$  = afstand mellem trækarmeringens tyngdepunkt og  
pladens trykkede side  
 $l$  = sidelængde  
 $u$  = udbøjning  
 $A_s$  = areal af armering i underside (s.6)  
 $A'_s$  = areal af armering i overside (s.6)

$A_{sx}$  og  $A_{sy}$  er defineret s.6.

### Kræfter og momenter

- $F$  = kraft, hjørnekraft  
 $M$  = bøjningsmoment  
 $m$  = moment pr. længdeenhed  
 $m_u$  = flydemoment for træk i  $A_s$   
 $m'_u$  = flydemoment for træk i  $A'_s$

$m_x$ ,  $m_y$  og  $m_{xy}$  er defineret s. 10

$m_b$  og  $m_v$  er defineret s. 19

- $p$  = lastintensitet  
 $r$  = reaktion pr. længdeenhed  
 $v$  = forskydningskraft pr. længdeenhed

### Andre størrelser og forkortelser

- R,S,T og Y = armeringstyper (se tabel 2 s.12)  
W = arbejde

## Tøjninger og spændinger

- $f_c$  = betonens trykstyrke  
 $f_t$  = betonens trækstyrke  
 $f_y$  = armeringens trækflydespænding  
 $\sigma$  = normalspænding  
 $\tau$  = forskydningsspænding  
 $\varepsilon$  = tøjning

## Dimensionsløse størrelser

- $\alpha$  = vinkel mellem revneretning og x-retning  
 $\gamma$  = partialkoefficient  
 $\varphi$  = armeringsforhold  $\frac{A_s}{1000 h_{ef}}$  (s.6)

$\Phi$  og  $\mu$  er defineret s. 11

- $\omega$  = drejningsvinkel (s. 22)  
 $i$  = indspændingsgrad defineret s. 40

## Indices

- bal = balanceret ("balanced")  
c = beton og/eller tryk ("concrete, compression")  
d = regningsmæssig ("design")  
ef = effektiv ("effective")  
ext = ydre ("external")  
f = last ("force")  
int = indre ("internal")  
k = karakteristisk ("characteristic")  
min = minimum ("minimum")  
o = start, udgangs- ("original")  
s = armering ("steel")  
t = træk i beton eller tværarmering ("tension, transverse")  
u = brud ("ultimate")  
y = flydning ("yield")

## STIKORDSREGISTER

affinitetssætningen	19	indre arbejde	23
altanplade	48	kantforstærkning	8
arbejdsligningen	22	Kempeffekt	53
balance tilstand	12	kuppelvirkning	50
brudfigurer	18,21	mindste øvreværdi	24
brudlinieteori	18	minimumarmering	6,11
dobbeltspændt plade	5	nedbøjningsundersøgelse	5
dæktag	7	normens metode	37
effektiv højde	6	opbøjning	32,42
enkeltspændt plade	5	opskydning	32
ensarmeret	19	ortotrop armering	6
$\Phi$ -metoden	11	pladens ligevægtsligning	34
$\Phi_{bal}$ (tabel 2)	12	pladetykkelse	5
$\Phi_{min}$ (tabel 1)	12	reaktioner	8,34,41
flydebetingelsen	15	skjult bjælke	48
flydelinie	18	snitkræfter	10
flydezoner	18,28,31	stangafstand	7
fordelingsarmering	5,6	strimmelmetoden	46
forskydningsarmering	8	trappelinie	20
forskydningsspænding	8	trykmembranvirkning	50
gennemlokning	9	tværsnitsdimensionering	11
hjørnekraft	36,41	vinkeldrejning	23
hovedarmering	5,6	vipper	29
indspændingsgrad	40,41	vridningsmoment	10
		ydre arbejde	22